Présentation

L'exemple présenté ci-dessous est extrait du manuel *Faire des maths avec Mathematica*, paru en 2001 dans la collection *Technosup* des éditions *ellipses*.
L'auteur, Norbert Verdier, est un professeur agrégé de mathématiques de l'Institut Universitaire de Technologie de l'Université de Paris-Sud. Il a été un des premiers à introduire l'utilisation régulière du calcul formel avec *Mathematica*, au milieu des années 90.
Son approche est originale : l'utilisation de *Mathematica*, avec ses particularités, amène l'étudiant à s'interroger constamment sur les résultats obtenus et ainsi à comprendre en profondeur les concepts vus en cours.
Faire des maths avec Mathematica, propose une démarche progressive. La première partie du manuel, *Initiation à Mathematica*, familiarise le lecteur avec les commandes de base et surtout lui présente les principales caractéristiques de ce logiciel de calcul formel. La seconde partie présente quatre séries de travaux pratiques portant sur des problèmes de base en algèbre et en calcul différentiel et intégral. Ces travaux pratiques utilisent les capacités de *Mathematica* pour amener les étudiants à approfondir les concepts présentés en cours. La troisième partie présente aux étudiants huit thèmes pouvant être traités avec *Mathematica*. Il s'agit de véritables projets où l'étudiant est amené à faire preuve d'autonomie et d'imagination et où, pour résoudre des problèmes, l'étudiant sera amené a utiliser à la fois les méthodes classiques et *Mathematica*, qui se complètent et se renforcent.

Ce manuel accompagne plus particulièrement les manuels de cours du même auteur *Analyse-Fonctions de la variable réelle* et *Séries, Transformations, Intégration* édités chez Eska. Ces manuels sont destinés aux élèves des IUT et correspondent au niveau collégial et début du premier cycle.

Norbert Verdier a par ailleurs édité *L'infini en mathématiques*, chez Dominos, *Qu'est-ce que les mathématiques* et *Le discret et le continu* chez Le Pommier.

L'exemple qui suit est extrait du TP 1, *Initiation*.

Algèbre et calcul

a) Donner une primitive de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8}$. Expliquer.

b) Même chose avec la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8}$. Que devrait-on répondre?

c) Même chose avec $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}$. Comment justifier le résultat obtenu avec *Mathematica*?

Réponses

Question a)

Avec *Mathematica*, nous obtenons :

$$\int \frac{1}{x^2 - 8} \, dx$$

$$-\frac{\tanh^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}$$

À la main.

Pour avoir une primitive, on n'est pas obligé de passer par là. Il suffit de décomposer la fonction en éléments simples et d'intégrer séparément. On obtient une solution sous forme de logarithme. *Mathematica* répond en invoquant $\tanh^{-1}(\ )$, à savoir l'arctangente hyperbolique. Essayons de comprendre! C'est la fonction réciproque de la tangente hyperbolique. En effet la tangente hyperbolique est une fonction bijective (car continue et strictement croissante) de **R** sur $]-1,1[$, donc elle admet une fonction réciproque de $]-1,1[$ sur R. Pour exprimer cette fonction réciproque à l'aide des fonctions usuelles, on part de $y = \mathrm{th}(x)$ et de là on extrait *x* en fonction de *y*.

Comme $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, on est ramené à résoudre $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

La résolution est effectuée en saisissant :

$$\textbf{Clear[y]; Solve}\left[y == \frac{E^{x} - E^{-x}}{E^x + E^{-x}}, x\right] // \textbf{Simplify}$$

Solve::ifun :

Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

$$\left\{\left\{x \to \log\left(-\frac{\sqrt{-y-1}}{\sqrt{y-1}}\right)\right\}, \left\{x \to \log\left(\frac{\sqrt{-y-1}}{\sqrt{y-1}}\right)\right\}\right\}$$

À priori, il y a deux solutions mais une seule convient (la deuxième) car la première est constituée du logarithme d'une expression négative!

Rappel

La résolution à la main est obtenue en posant $X = e^x$. De là :

$$y\left(X + \frac{1}{X}\right) = \left(X - \frac{1}{X}\right)$$

En multipliant les deux membres par X :

$$y\left(X^2 + 1\right) = \left(X^2 - 1\right) \Leftrightarrow X^2(1 - y) = 1 + y$$

Ainsi :

$$X^2 = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

Soit en revenant à x :

$$x = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

Cela permet d'avoir l'écriture de l'arctangente hyperbolique à l'aide de fonctions usuelles.

Questions b)

On obtient :

$$\int \frac{1}{x^2+8}\, dx$$

$$\frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}$$

et

$$\int \frac{1}{x^2+a}\, dx$$

$$\frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}}$$

Pour le deuxième exemple, *Mathematica* fait comme si *a* était positif (il passe à la racine carrée) mais cependant il ne se trompe pas quand *a* est négatif (Voir le premier exemple).

Dans une copie de mathématique, il faudrait écrire :

- Si *a* est positif, on obtient le résultat ci-dessus;
- Si *a* est négatif, on utiliserait l'écriture avec l'arctangente hyperbolique (éventuellement exprimée à l'aide des fonctions usuelles.) Cf. a)

Questions c)

On obtient :

$$\int \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log\left(x^2+1\right)$$

Pour établir cela, comme on est en présence d'une fraction, on la décompose en éléments simples puis on intègre chaque élément simple et ensuite on en déduit la primitive demandée.

Cf. Thuillier-Belloc, *Mathématiques Analyse*, Tome 2, Ed. Masson, 1992, page 28. Attention dans la dernière ligne, il y a une coquille à rectifier.)

Remarques :

1/ *Mathematica* se permet de ne pas mettre les valeurs absolues au logarithme. En toute rigueur, on doit les mettre. En effet, la fonction étudiée admet une primitive sur tout intervalle dont -1 n'est pas un élément car elle n'est pas définie en -1. (Voir Thème n°2 : *Calculs autour d'une intégrale* et TP 2, Exercice 7).

2/ *Mathematica* n'indique pas que la primitive est à une constante près!

Les deux remarques précédentes montrent que *Mathematica* n'est pas un logiciel pédagogique, mais un logiciel qui s'adresse sinon à des professionnels au moins à des utilisateurs qui « savent ce qu'ils font ». En l'utilisant, on est en permanence amené à prendre du recul : on ne peut pas utiliser *Mathematica* en suivant une démarche « presse-boutons » sinon on s'expose à d'inévitables déconvenues.