

Étude des populations

Un exemple de chaos déterministe

Nous vous avons montré quelques éléments de la théorie du chaos à partir des découvertes de Lorenz. Pour étudier quelques unes des propriétés de cette théorie, nous allons prendre un exemple simple : l'évolution de certaines populations. Des mathématiciens-écologistes se sont penchés sur cette question depuis une vingtaine d'années, avec l'aide d'ordinateurs, bien sûr!

Cet exemple met en valeur deux des caractéristiques majeures du chaos : la complexité apparaît à partir d'équations très simples, le phénomène est extrêmement sensible aux conditions initiales et, enfin, l'ordinateur permet d'associer un "attracteur étrange" à ce phénomène, cet attracteur étant une figure fractale.

Les populations animales

Nous allons prendre cet exemple dans un type de problème que vous avez rencontré en mathématiques et en biologie, la croissance des populations. Cette croissance peut se représenter par deux modèles : le modèle exponentiel de Malthus et le modèle logistique de Vershulst.

Le modèle exponentiel de croissance des populations suppose que chaque génération est proportionnelle à la précédente. D'une période à la suivante, l'évolution de la population se traduit par la relation de type exponentiel :

$$x_{t+1} = kx_t$$

où x_t représente la population à la période t , x_{t+1} la population à la période $t+1$ et k le taux de reproduction.

Vous avez vu dans des cours antérieurs que ce modèle est irréaliste : la terre aurait depuis longtemps été submergée par une marée humaine. En effet, le modèle exponentiel ignore des facteurs importants, comme celui des ressources qui ne sont pas illimitées.

Pour établir un modèle plus satisfaisant, il faut tenir compte du fait que les ressources disponibles sont limitées et que, pour tout territoire, il existe une population maximale au-delà de laquelle la population décroît, quelle que soit l'espèce. Pour trouver une fonction qui traduirait de façon plus réaliste l'évolution d'une population, énumérons, en les simplifiant un peu, les propriétés que doit vérifier cette évolution :

- C'est un phénomène itératif : si x_{t+1} représente l'effectif de la population de la période $t+1$, il dépend de celui de la période précédente x_t ;
- Une population ne peut croître indéfiniment sur un territoire délimité : il existe un maximum après lequel elle décroît. Il faut donc prévoir un facteur rétroactif limitant la hausse de population quand sa densité devient trop élevée. Pour

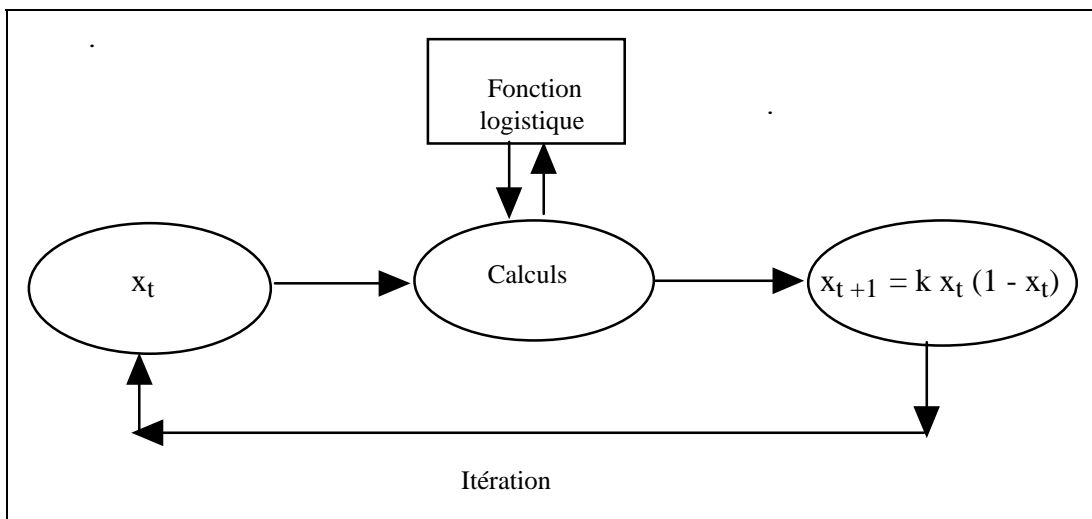
simplifier les calculs, x ne représentera pas la population en nombre absolu, mais en pourcentage de ce maximum correspondant à un territoire donné; x ne peut donc fluctuer qu'entre 0 et 1;

- k représente le taux de croissance effectif d'une période à la suivante.

L'effectif de la population de la période $t+1$ sera la valeur x_{t+1} , exprimée en pourcentage de la population maximale que peut accueillir le territoire donné, et sera obtenu de l'effectif de la population x_t de la période précédente t par l'équation :

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$$

Le facteur $(1 - x_t)$ représente l'effet rétroactif.



En effet, quand la densité de la population est élevée, proche de la saturation, alors x_t est proche de 1 et, par conséquent, $1-x_t$ sera proche de 0. Donc, le facteur rétroactif $(1-x_t)$ aura tendance à minimiser la population x_{t+1} de la période suivante.

Par contre, si la densité de la population est très basse, proche de 0, alors x_t sera proche de 0 et, par conséquent, $1-x_t$ sera proche de 1. Donc, le facteur rétroactif $(1-x_t)$ aura tendance à maximiser la population x_{t+1} de la période suivante.

Cette équation, qui donne le modèle mathématique de la croissance des populations animales, est aussi nommée *Modèle de Verhulst*, d'après le mathématicien belge Verhulst qui l'a proposée en 1838, et a joué un rôle important en biologie. Cette équation du second degré, donc non-linéaire, est aussi appelée *Modèle logistique*.

Cette courbe, vite tombée dans l'oubli, va être reprise d'abord par le démographe américain Raymond Pearl au début du siècle. Celui-ci est convaincu que le modèle logistique explique les variations de toutes les populations vivantes. Le modèle logistique va surtout être développé par le mathématicien italien Volterra, plus connu pour son opposition au

fascisme que pour ses travaux mathématiques. Le point de départ de sa réflexion est l'évolution " chaotique " des bancs de poissons dans l'Adriatique durant la première guerre mondiale...

Ce qui intrigue Pearl et Volterra, c'est le comportement différent de l'évolution de la population d'une espèce à l'autre. Sur un territoire donné, la population de certaines espèces semble se stabiliser, d'autres semblent suivre des cycles réguliers (par exemple les sept années de vaches grasses, puis les sept années de vaches maigres) et d'autres enfin semblent fluctuer de façon totalement aléatoire. Or, chaque population animale semble avoir un comportement de même nature, indépendamment des facteurs externes (maladie, prédateurs...). Pourquoi certaines populations se stabilisent-elles et d'autres non ?

Au début des années 70, un mathématicien américain, James Yorke, et un physicien australien, Robert May, tous deux écologistes, vont trouver la réponse. Ils découvrent que l'évolution de chaque population animale découle de son équation logistique et dépend de la valeur de k , son taux de croissance effectif. Pour cela, ils étudient la population de poissons d'un lac australien et l'équation logistique à l'aide d'un ordinateur.

Plutôt que d'étudier une population de poissons d'un lac australien, Briggs et Pest, dans *Un miroir turbulent*, proposent d'étudier l'évolution d'une population d'insectes, les bombyx. Ces insectes ont la particularité de ne vivre qu'une année. L'été, ils pondent leurs œufs, puis meurent. Le modèle est ainsi simplifié. La population est celle d'une seule génération et ne dépend que des œufs issus de la génération précédente qui ont éclos.

Nous allons voir que selon la valeur de son taux de croissance effectif k , une population animale, comme celle des bombyx, peut tendre vers un état d'équilibre, ou fluctuer entre deux ou quatre ou huit valeurs, ou varier de façon totalement aléatoire.

Ainsi, pour certaines espèces animales, il est normal que les populations varient irrégulièrement, tandis que pour d'autres, il est normal de tendre vers une situation d'équilibre. Cette " disparité ", ce " chaos " dans certains cas, est liée aux propriétés mêmes d'une équation à l'allure pourtant bien simple :

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$$

La complexité devient la règle et non l'exception, et ce qui semble " chaotique " découle des propriétés bien précises d'une fonction bien précise.

Ce sont ces résultats que nous allons retrouver. Pour cela, nous allons étudier l'évolution de populations animales dont les taux de croissance effectifs k varient de 1 à 4. Nous étudierons ces évolutions par calcul et par l'étude du graphe de la fonction logistique.

Mais avant de poursuivre, ne perdez pas de vue que le rôle d'un modèle mathématique est de simuler un phénomène naturel. En cas de contradiction entre les résultats des calculs et la réalité, c'est le phénomène naturel qui aura raison. C'est le modèle mathématique qu'il faudra améliorer pour qu'il rende mieux compte du phénomène et non l'inverse. Ne confondez pas la carte et le territoire !

Taux de croissance effectif k , de l'ordre au chaos

Nous allons constater que, selon les valeurs du taux de croissance effectif k , l'évolution de la population peut prendre des allures très simples ou très complexes.

Reprenons l'équation logistique permettant de calculer le nombre d'individus d'une population animale, dont le taux de croissance effectif est k , à la période t :

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$$

Rappelons que x_t représente, sur un territoire donné, le pourcentage de la population de la période t par la population maximale que peut accueillir ce territoire.

Pour connaître la population de la période t , nous avons besoin de deux éléments pour pouvoir déclencher les calculs :

Le taux k c'est le taux de croissance effectif propre à chaque espèce;
 x_0 c'est la population initiale sur un territoire donné, exprimée en pourcentage de la population totale maximale de ce territoire.

Comme valeur initiale, prenons une valeur assez faible, comme $x_0 = 0,1$.

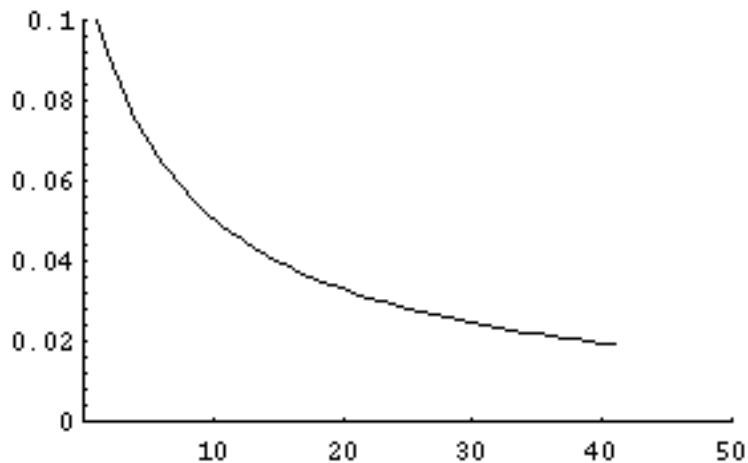
Cela signifie que la population n'est que le dixième de sa valeur "maximale". Donnons maintenant plusieurs valeurs à k .

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 1

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = x_t(1 - x_t)$$

Si la valeur initiale x_0 de la population en pourcentage de la population maximale que peut faire vivre le territoire est $x_0 = 0,1$, l'évolution de la population pour les quarante premières périodes est représentée par la courbe ci-dessous :



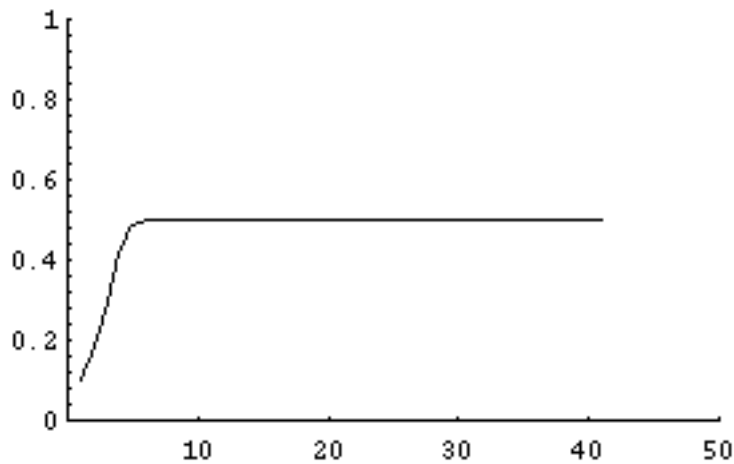
Nous constatons que pour ce taux de croissance, la population décroît et va tendre vers zéro.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 2

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t)$$

La valeur initiale x_0 reste $x_0 = 0,1$ et l'évolution de la population pour les quarante premières périodes est représentée par la courbe ci-dessous :



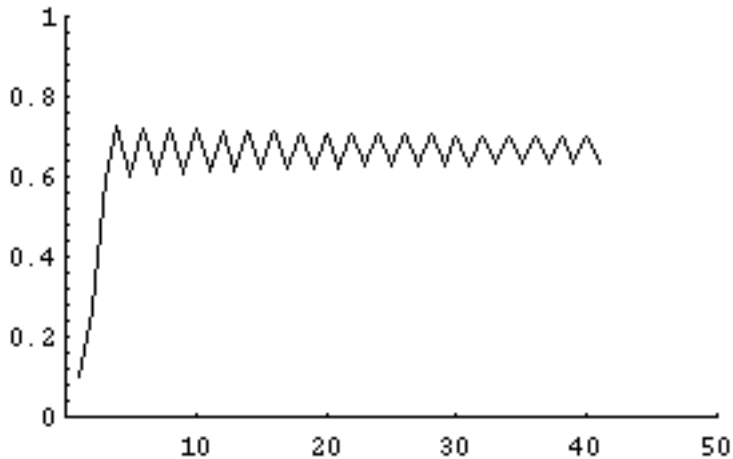
Nous constatons que pour ce taux de croissance, la population va se stabiliser autour d'un nombre correspondant à la moitié de la population que le territoire pourrait accueillir.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 3

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 3x_t(1 - x_t)$$

La valeur initiale x_0 reste $x_0 = 0,1$ et l'évolution de la population pour les quarante premières périodes est représentée par la courbe ci-dessous :



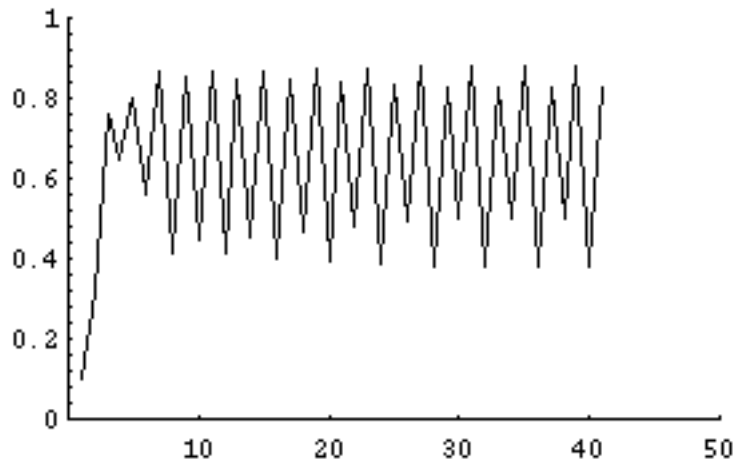
Avec un taux de croissance effectif de 3, le nombre d'individus de cette population se met à osciller entre deux valeurs que l'on peut calculer à l'aide de l'ordinateur. Nous obtenons alors les valeurs 0,64 et 0,68.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 3,5

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 3,5x_t(1 - x_t)$$

La valeur initiale x_0 reste $x_0 = 0,1$ et l'évolution de la population pour les quarante premières périodes est représentée par la courbe ci-dessous :



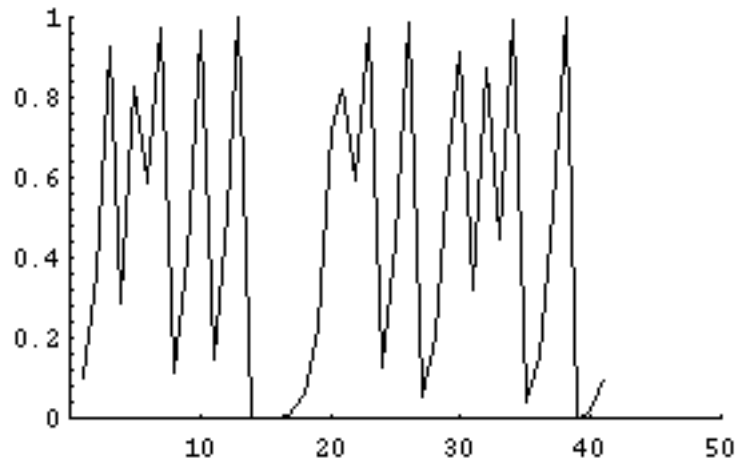
Avec un taux de croissance effectif de 3,5 la population oscille maintenant entre quatre valeurs : 0,39, puis 0,83, puis 0,49, et enfin 0,87. L'évolution d'une population qui a un tel taux de croissance effectif est nettement cyclique.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 4

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$$

La valeur initiale x_0 reste $x_0 = 0,1$ et l'évolution de la population pour les quarante premières périodes est représentée par la courbe ci-dessous :



Nous constatons que, lorsque le taux de croissance effectif k est égal à 4, le nombre d'individus des populations des périodes successives semble osciller irrégulièrement, de façon "chaotique" entre les deux extrêmes : la saturation quand x tend vers 1 et l'extinction quand x tend vers 0.

La sensibilité aux conditions initiales

Nous venons de constater que, lorsque le taux de croissance effectif k évolue de 0 à 4, le nombre d'individus par génération semble se stabiliser pour des valeurs de k inférieures à 3. Puis, lorsque k augmente, ce nombre semble osciller d'abord entre deux valeurs, puis 4, puis 8, etc. Et enfin, au-delà d'un certain seuil, ce nombre semble osciller de façon aléatoire.

Pour toutes ces simulations avec des valeurs différentes du taux de croissance effectif k , nous avons conservé la même valeur initiale 0,1. Aurions-nous eu les mêmes réponses pour d'autres valeurs initiales ?

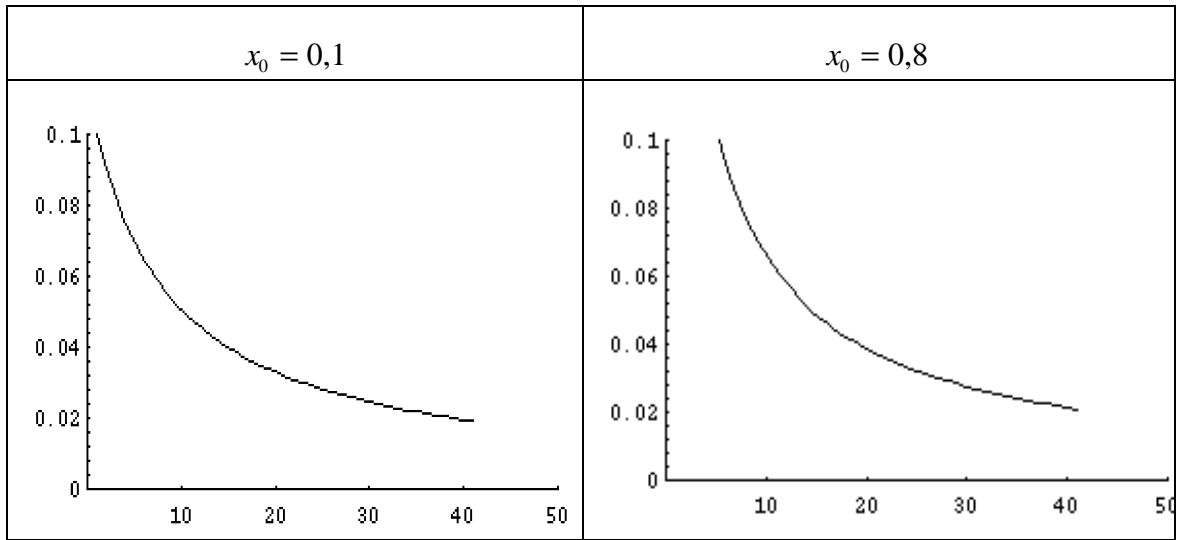
Pour le vérifier, reprenons nos calculs précédents avec une population initiale représentant 0,8 de la population maximale pour un territoire donné et comparons les résultats obtenus.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 1

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = x_t(1 - x_t)$$

Selon que la population initiale soit $x_0 = 0,1$ ou $x_0 = 0,8$, nous obtenons :



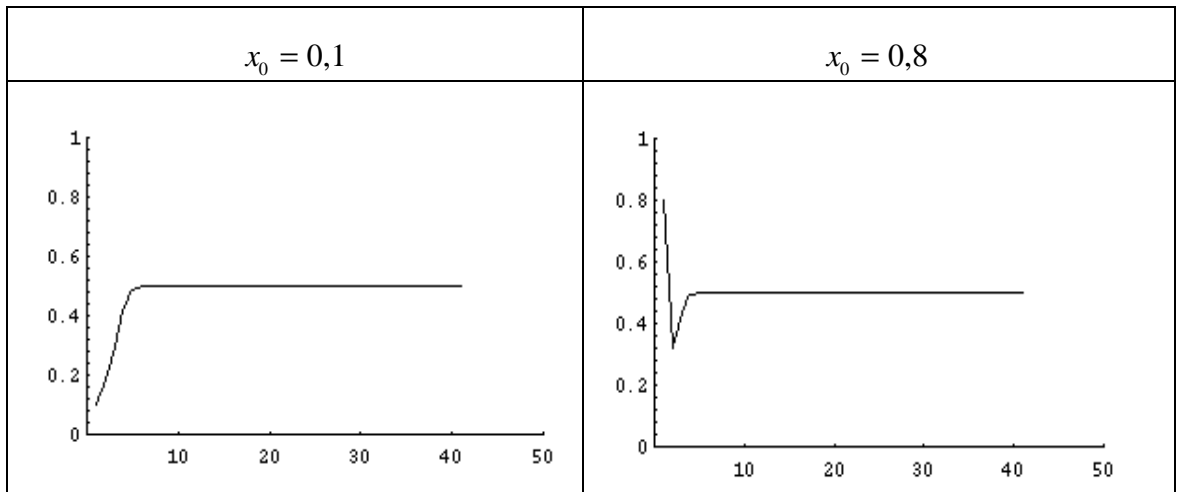
Nous constatons que, quelle que soit la population initiale, elle tend vers zéro.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 2

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t)$$

Selon que la population initiale soit $x_0 = 0,1$ ou $x_0 = 0,8$, nous obtenons :



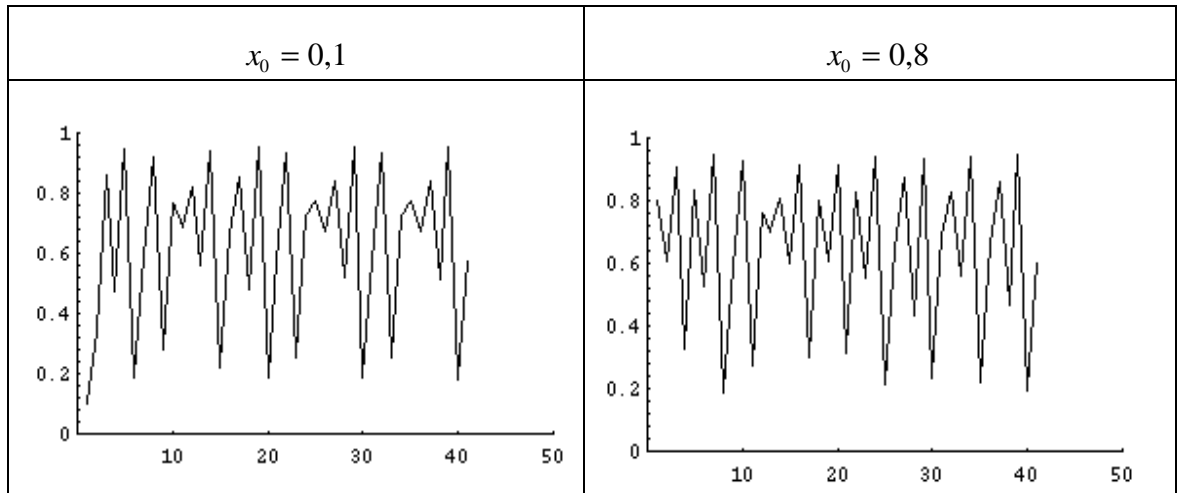
Nous constatons que la population tend là aussi vers la même valeur.

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 3,8 (1)

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 3,8x_t(1 - x_t)$$

Selon que la population initiale soit $x_0 = 0,1$ ou $x_0 = 0,8$, nous obtenons :



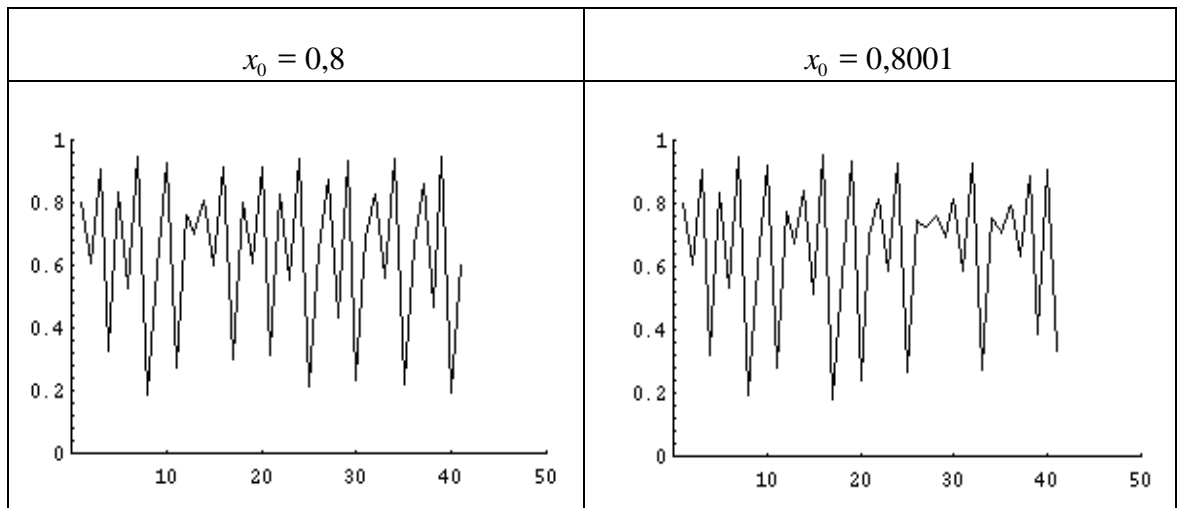
Nous constatons ici que l'évolution des populations est très différente. Nous avons pris des populations initiales éloignées. Si nous avons pris des populations initiales très proche, quelle aurait été l'évolution des deux populations?

Population dont le taux de croissance effectif k est égal à 3,8 (2)

La croissance de la population est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = 3,8x_t(1 - x_t)$$

Selon que la population initiale soit $x_0 = 0,8$ ou $x_0 = 0,8001$, nous obtenons :



Nous constatons ici que l'évolution des populations est très différente même si elles étaient très proches initialement et même si l'évolution de ces populations découle de la fonction très simple $x_{t+1} = 3,8x_t(1 - x_t)$. Si nous avons pris comme population initiale $x_0 = 0,800001$ nous aurions constaté que son évolution aurait été également très différente de l'évolution des populations qui auraient eu $x_0 = 0,8$ ou $x_0 = 0,8001$ comme valeurs initiales.

Dans cette extrême sensibilité d'une équation très simple aux conditions initiales, nous retrouvons un élément important de la théorie du chaos découverte par Lorentz. Cela rejoint l'effet papillon. En fait une différence de $\frac{1}{10000}$ sur le pourcentage de la population que peut faire vivre un territoire donné peut se traduire d'une façon plus imagée. Supposons qu'un certain territoire puisse faire vivre 10 000 bombyx. Nous venons de découvrir que si la génération 0 comporte exactement 8 000 bombyx son évolution deviendra rapidement très différente de celle qu'elle aurait si cette génération 0 avait eu 8 001 bombyx. Cet insecte de plus a totalement changé l'évolution de sa population. C'est l'effet papillon presque au sens strict.

Résumons nos découvertes :

Nous venons de constater que, selon la valeur du taux de croissance effectif d'une population, le nombre d'individus de cette population, par périodes, peut :

- tendre vers 0;
- tendre vers une valeur stable;
- osciller entre 2, 4, 6, 8, etc., valeurs différentes;
- prendre n'importe quelle valeur (phénomène chaotique).

En dehors de la phase chaotique, la valeur initiale n'a aucune importance, mais dans cette phase chaotique, au contraire, la plus petite variation de valeur initiale change du tout au tout les valeurs suivantes. C'est ce qu'on appelle "l'effet papillon". Un insecte de plus ou de moins et la face du monde en est changée...

Nous allons maintenant explorer davantage le comportement de la fonction $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$

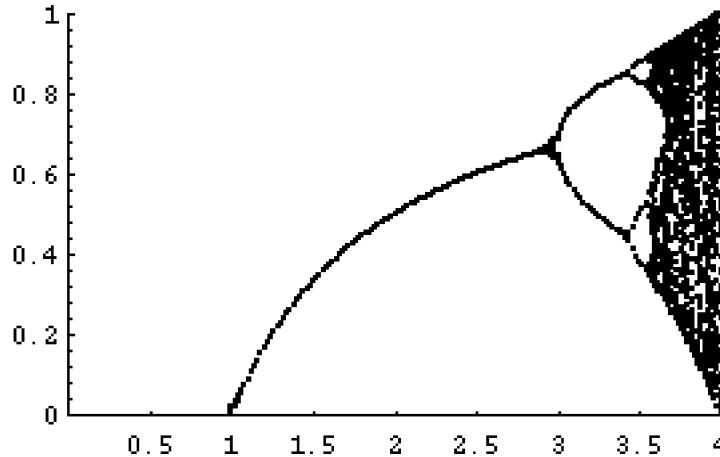
Diagramme de bifurcation, attracteur étrange et ordinateur

Pour comprendre l'évolution d'une population selon le modèle logistique, nous avons représenté l'évolution dans le temps, quarante périodes, d'une population correspondant à une valeur initiale précise et à une constante k déterminée. Nous avons constaté, en prenant quelques valeurs particulières de k , que pour ces différentes valeurs, la population avait une évolution différente. Nous allons donc étudier le comportement de la fonction logistique en prenant k comme variable.

Les calculs demandés pour étudier ce comportement exigent l'usage de l'ordinateur. Un peu comme nous l'avons vu dans le cas de l'attracteur étrange de Lorenz, la découverte du diagramme des bifurcations et de ses propriétés n'a été possible que grâce au développement de l'informatique. Comme cela se passait durant les années 70, l'utilisation de l'ordinateur en sciences n'était déjà plus exceptionnelle, comme c'était le cas au début des années 60, et l'histoire n'a pas retenu le modèle utilisé par Feigenbaum.

En donnant à k des valeurs comprises entre 0 et 4 et espacées de 0,02, nous allons, pour chacune de ces valeurs, calculer ce que deviendra la population pour chaque période comprise entre la trentième et la centième.

Nous pouvons donc ésumer les résultats des sections précédentes sur une figure. Le diagramme ci-dessous représente, pour chaque valeur du taux de croissance effectif k , porté en abscisse, cent valeurs successives de $x(t)$, en ordonnées, pour t variant de 30 à 130.



C'est le fameux diagramme de bifurcation ou diagramme de Feigenbaum, du nom du physicien Mitchell Feigenbaum qui l'a étudié en profondeur et a montré qu'on le retrouvait dans de nombreux phénomènes naturels. Voici ce qu'en disent les mathématiciens allemands Peitgen, Jurgens et Saupe dans *Fractals for the classroom*¹, p. 192 :

“ Le diagramme de Feigenbaum est devenu l'image la plus importante de la théorie du chaos. Ce sera sûrement une image qui restera comme étant celle du progrès scientifique de ce siècle. C'est une image générée par ordinateur et il ne pouvait en être autrement. Les propriétés mathématiques fascinantes de cette fonction seraient demeurées ignorées si les ordinateurs n'avaient pas été mis au point. ”

Nous ne pouvons, dans le cadre de cette expérience, voir en quoi ce diagramme se retrouve dans de nombreux phénomènes de la nature, mais examinons au moins deux de ses propriétés les plus intéressantes : le doublement de période du phénomène et la dimension “ fractale ” de ce diagramme.

Remarquons que nous retrouvons sur cette figure les résultats obtenus :

- * lorsque $k = 1$, le taux représentant la population est presque nul;
- * lorsque $k = 2$, le taux représentant la population se situe autour d'une valeur constante, environ 0,5;
- * lorsque $k = 3$, le taux représentant la population oscille entre deux valeurs;
- * lorsque $k = 3,5$, le taux représentant la population oscille entre quatre valeurs;
- * lorsque $k = 4$, le taux représentant la population peut prendre n'importe quelle valeur;

¹PEITGEN, Heinz-Otto, Hartmüt JÜGENS et Dietmar SAUPE. *Fractals for the classroom*, New-York, Springer-Verlag, 1991, 500 p.

Le doublement de période

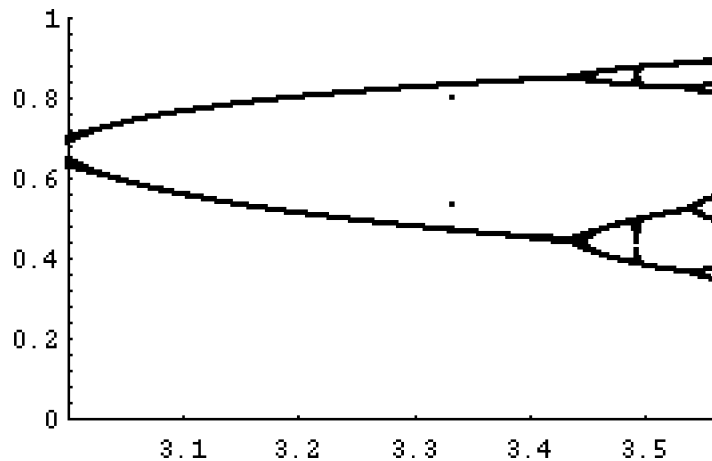
Si nous revenons à notre exemple où la fonction logistique donne l'évolution d'une population animale selon son taux de croissance effectif k , le diagramme de Feigenbaum nous indique que, quand ce taux est inférieur à 3, le système tend vers un état final stable. Cela correspond en général à notre intuition influencée par notre désir inconscient d'ordre et de simplicité.

Mais, à partir de 3, cela se complique : le nombre d'individus par génération se met à osciller entre 2, puis 4, puis 8 valeurs... pour enfin entrer dans une zone "chaotique" où toute valeur semble possible. Il y a déjà là quelque chose de fascinant. Mais si nous observons de plus près cet intervalle de "doublement" qui précède la zone chaotique, nous allons découvrir des résultats encore plus curieux.

Effectuons une série de « zooms » sur la région comprise entre $k = 3$ et $k = 4$.

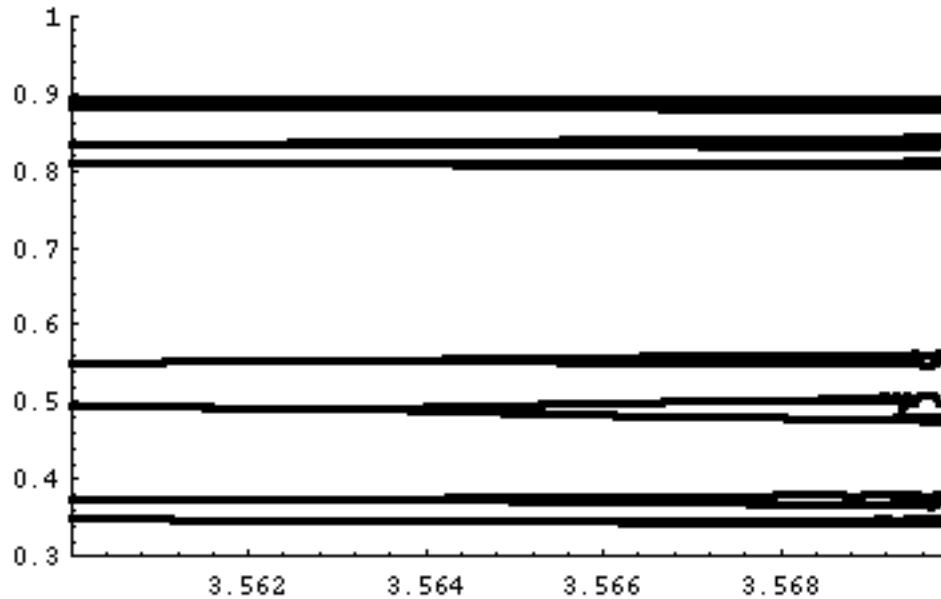
Zoom 1 : $k = 3$ à $k = 3,564407$

Prenons d'abord l'intervalle des trois premiers doublements avec 2, puis 4, puis 8 branches, pour un taux de croissance effectif k variant de $k = 3$ à $k = 3,564407$. Reprenons le diagramme de Feigenbaum pour k variant de $k = 3$ à $k = 3,564407$. Nous obtenons la figure ci-dessous :



Zoom 2 : $k = 3,5$ à $k = 3,569891$

Prenons d'abord l'intervalle correspondant aux derniers doublements pour un taux de croissance effectif k variant de $k = 3,5$ à $k = 3,5698917$. Reprenons le diagramme de Feigenbaum pour k variant de $k = 3,5$ à $k = 3,5698917$. Nous obtenons la figure ci-dessous :



Nous constatons que la première bifurcation se produit pour $k = 3$, la seconde pour $k = 3,449489$, la troisième pour $k = 3,544090$ et la quatrième pour $k = 3,564407$.

Nous avons les trois doublements suivants avec 16, puis 32, puis 64 branches, pour le taux k variant de $k = 3,564407$ à $k = 3,569891$, et ainsi de suite.

Nous constatons alors que les points de bifurcation se situent à $k = 3,564407$, puis à $k = 3,568759$, ensuite à $k = 3,569692$ et enfin à $k = 3,569891$.

En fait, les bifurcations se multiplient à partir de points de plus en plus rapprochés et sur des intervalles de plus en plus courts. Le physicien Feigenbaum a démontré deux résultats curieux :

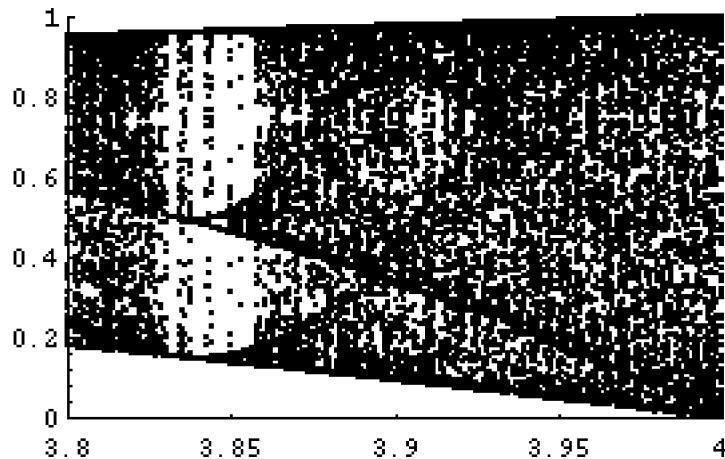
- Les bifurcations vont se multiplier à **l'infini** sur un intervalle qui ne dépassera pas le point d'abscisse 3,5699456... appelé "point de Feigenbaum" ou "porte d'entrée sur le chaos", car, après ce point, le système devient "chaotique". Il se met à fluctuer entre des valeurs "imprévisibles" et devient extrêmement sensible aux conditions initiales;
- La longueur des intervalles propres aux différentes classes de bifurcation (2, 4, 8, 16...) diminue dans un rapport identique, 4,6692... appelé, bien sûr, "la constante de Feigenbaum".

Peitgen indique que ces bifurcations, points et constante de Feigenbaum, ne se retrouvent pas seulement dans le cas de la fonction logistique étudiée par May, mais dans de nombreux phénomènes physiques comme l'hydrodynamique, l'électronique, les lasers ou l'acoustique.

Zoom 3 : $k = 3,8$ à $k = 4$

Remarquons enfin un dernier phénomène bien curieux, celui des “fenêtres”. Si nous examinons plus attentivement la “zone chaotique” comprise entre le point de Feigenbaum, $k = 3,5699456\dots$ et $k = 4$, nous constatons qu’il existe des zones étroites où la fonction logistique se remet à osciller entre un nombre fini de bifurcations avant de replonger dans le chaos.

Prenons par exemple l'intervalle compris entre $k = 3,8$ et $k = 4$:



Vous constatez que, dans cette fenêtre, il y a des bifurcations qui ressembleraient au graphe lui-même si on les agrandissait...

Nous aurions pu reprendre ces calculs entre $k = 3,848$ et $k = 3,850$. Nous aurions alors constaté que nous retrouvons la même figure et que, si nous l'agrandissions à l'infini, nous la retrouverions toujours et toujours.

Nous venons de retrouver une figure *fractale*, l'attracteur étrange de la fonction logistique.

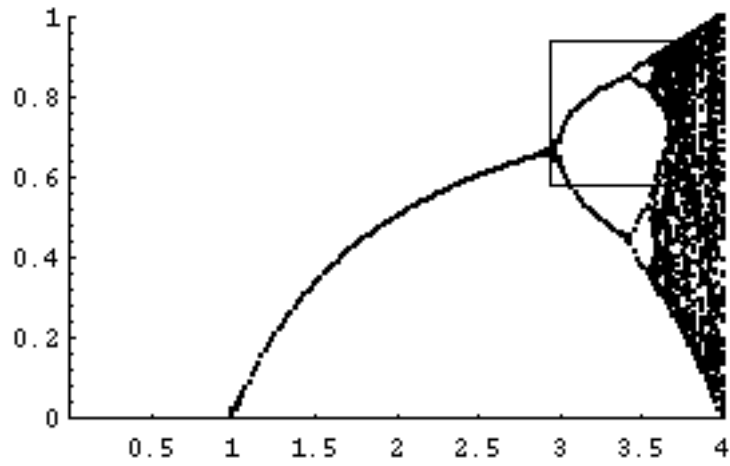
L'attracteur étrange

Ce que nous venons d'observer, c'est un phénomène mathématique lié à la théorie du chaos, tout aussi moderne et tout aussi fondamental : les fractales.

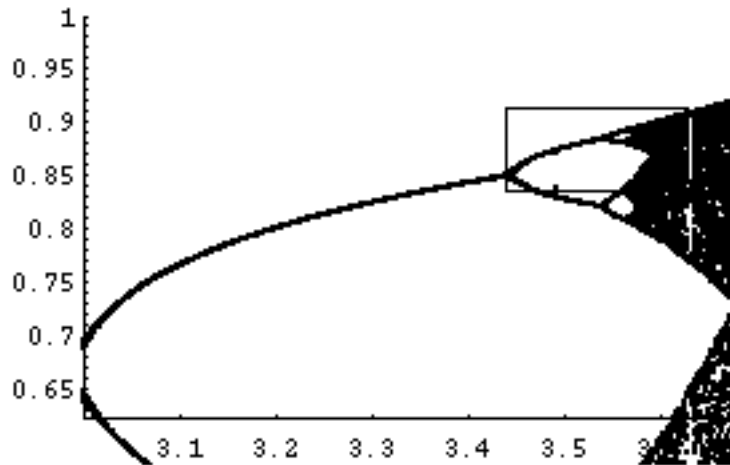
Très brièvement, il s'agit de figures géométriques découvertes par le mathématicien Benoît Mandelbrot, il y a une quinzaine d'années et qui ont la propriété étrange, mais fréquente dans la nature, d'avoir le même aspect, quelle que soit l'échelle à laquelle on les observe.

Pour nous en convaincre, nous allons partir de la fonction logistique, puis l'agrandir à plusieurs reprises, pour constater que l'allure générale reste la même, quelle que soit la dimension.

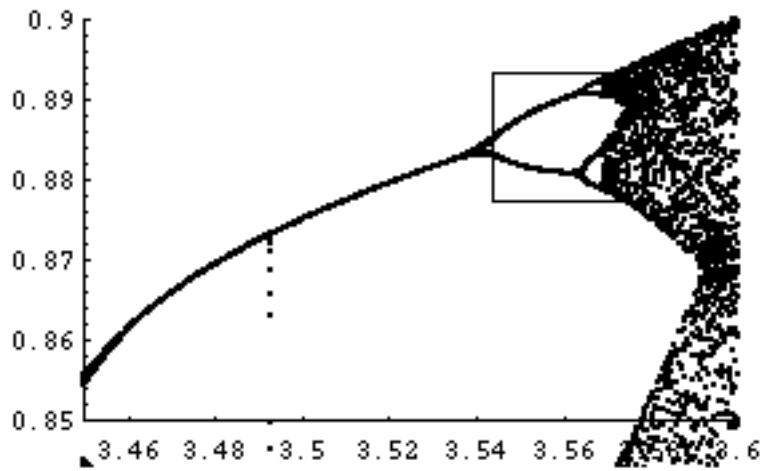
Sur la fonction initiale, agrandissons la région définie par le rectangle :



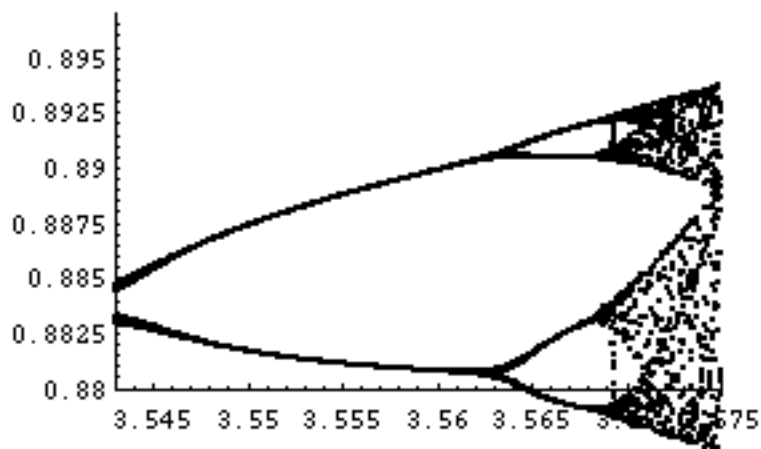
Si nous agrandissons la zone encadrée du diagramme de bifurcation ci-dessus, nous obtenons :



Agrandissons encore la zone encadrée et nous obtenons :



✍ Agrandissez une nouvelle fois la zone encadrée et vous obtenez :



Nous pourrions agrandir à l'infini, nous aurions toujours le même genre de figure... une fractale ! Leur propriété fondamentale est, en effet, d'être invariante, quelle que soit l'échelle.

Les fractales sont devenues, depuis quelques années, un domaine d'étude en pleine expansion. C'est un genre de figure que l'on retrouve aussi bien en mathématiques, qu'en biologie, en géographie, en physique, en géologie et même en art ou au cinéma, où elles servent à créer des paysages étranges...

Cette série de résultats vous montre les propriétés étonnantes de la fonction logistique. Les calculs précédents vous ont convaincus que ces propriétés auraient difficilement pu être découvertes sans l'aide des ordinateurs !

Dans son livre, *Une histoire de l'écologie*², page 193, Jean-Paul Deléage commente ainsi la découverte de May :

“ Grâce à la théorie mathématique du chaos, l'écologie théorique reçoit une stimulation décisive. Jusqu'au début des années soixante-dix, le débat sur l'écologie des populations opposait les tenants d'une théorie déterministe, voyant des évolutions régulières des populations ne subissant qu'exceptionnellement de brutales variations, à ceux pensant ces évolutions comme purement aléatoires. Mais de nombreux faits restaient mal expliqués. En particulier les explosions cycliques de certaines populations et leur périodicité étrange n'entraient dans aucune des deux explications. En montrant que des modèles déterministes peuvent donner naissance à un comportement aléatoire, Robert May réconcilie ces points de vue à partir d'une théorie plus profonde. Ce qui apparaît à un niveau d'appréhension comme une instabilité généralisée peut se concevoir à un autre comme un “ chaos stable ”. Une situation mathématiquement “ chaotique ” peut se révéler stable au point de vue écologique.

Révolution aux conséquences profondes dans la théorie écologique, et aux implications pratiques non moins importantes, l'approche de Robert May est un trait de lumière dans la situation théorique passablement confuse qui règne encore en écologie. May propose un formalisme unifié qui rend compte en même temps des variations aléatoires *et* des oscillations cycliques des populations, ce grand problème de l'écologie, depuis ses origines. Côté pratique, elle peut être utile pour la gestion des pêcheries, la protection des cultures et, d'une façon plus générale, dans les approches conceptuelles des politiques de conservation des ressources biologiques et de leur diversité. ”

Histoire de l'écologie, p. 193

En guise de conclusion...

Si, à cause de la montée de puissance des ordinateurs, la théorie du chaos a permis des avancées importantes dans différentes disciplines, elle soulève un débat majeur, celui du déterminisme. Dans quelle mesure la science permet-elle de prédire l'avenir ? Pour certains, les résultats obtenus jusqu'ici dans le cadre de la théorie du chaos prouvent l'importance des facteurs aléatoires dûs à l'infinie sensibilité des phénomènes aux conditions initiales. Pour ces personnes, les équations déterministes n'ont qu'une portée limitée et l'avenir restera imprévisible. Pour d'autres, au contraire, les résultats obtenus montrent que l'on peut trouver un ordre et des lois dans ce qui peut sembler “ chaotique ”. Ces lois sont tout simplement plus complexes...

C'est un débat ouvert et vif qui déborde largement les milieux scientifiques. Pour en avoir un aperçu, vous pouvez consulter, entre autres : *La théorie du chaos*³, *La querelle du déterminisme*⁴.

²DELÉAGE, Jean-Paul. *Une histoire de l'écologie*, Paris, Le Seuil, collection Points-Sciences, 1994, 330 p.

Annexe 1 Le modèle quadratique

Les calculs que nous avons effectués nécessitent l'usage d'un ordinateur, surtout pour le diagramme de Feigenbaum. C'est en effet par calcul, en itérant, pour différentes valeurs du taux de croissance effectif k , un grand nombre de fois la formule $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$ ou en appliquant la fonction composée $f^{(n)}(x_0)$, que nous avons obtenu pour chacune de ces valeurs de k , les valeurs vers lesquelles le nombre x_{t+1} des individus de cette population semblait tendre.

Nous aurions pu obtenir les mêmes réponses, sous une forme moins précise il est vrai, en nous basant uniquement sur le graphique de la fonction $y = f(x) = kx(1 - x)$ représentant le modèle logistique. Et ce graphiques se font assez simplement « à la main »,

Au départ, nous avons une population initiale x_0 , représentant le pourcentage de la population maximale possible sur un territoire donné.

Comme exemple, prenons $x_0 = 0,16$ et $k = 2$. Pour calculer la population de la période suivante x_1 , appliquons la fonction logistique sur la valeur initiale x_0 :

$$y_1 = f(x_0) = kx_0(1 - x_0)$$

Le principe que nous allons suivre pour utiliser la forme itérative $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$ à partir de la fonction $y = f(x) = kx(1 - x)$ est bien simple. Il s'agit, après avoir calculé la valeur y_t , de reprendre cette valeur et de l'attribuer à variable x_t . Or, pour obtenir x_t , tel que $x_t = y_t$, il suffit de faire une symétrie par rapport à la première bissectrice, $y = x$.

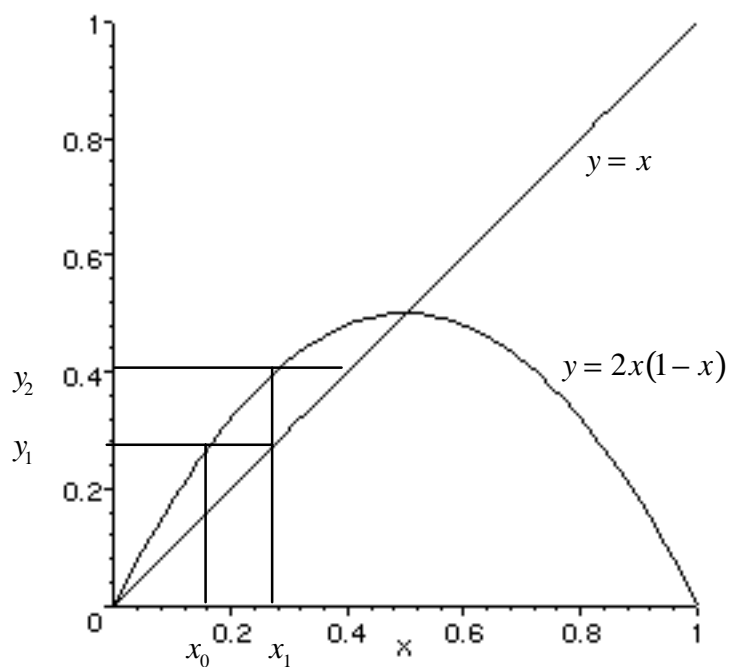
Les opérations que nous allons voir en détail sur le graphique, se résument simplement :

- À partir d'une valeur initiale x_0 de l'axe des abscisses, nous rejoignons la fonction par une verticale; la fonction prend la valeur $y_1 = kx_0(1 - x_0)$;
- Par l'horizontale $y_1 = kx_0(1 - x_0)$ issue du point précédent, nous rejoignons la droite $y = x$;
- Nous représentons l'abscisse de ce point d'intersection par la droite verticale $x = x_1$; nous avons bien $y_1 = x_1$
- À partir de la valeur x_1 de l'axe des abscisses, nous rejoignons la fonction par une verticale; la fonction prend la valeur $y_2 = kx_1(1 - x_1)$;
- Et ainsi de suite.

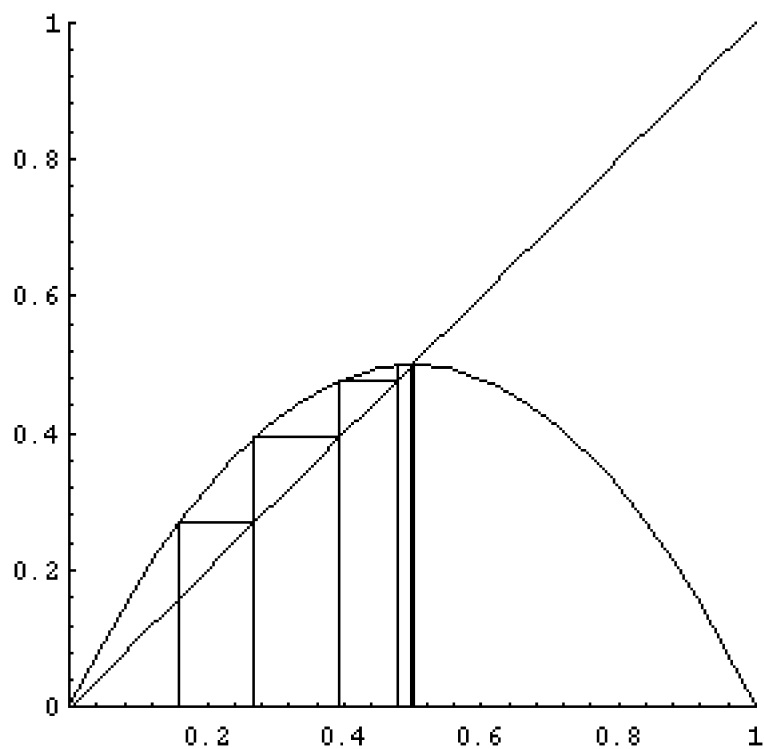
³GLEICK, James. *La théorie du Chaos*, Flammarion, 1991, 431 p.

⁴ATLAN, Henri, Ivar EKELAND, Edgar MORIN, Ilya PRIGOGINE, David RUELLE, Isabelle STENGERS, et René THOM. *La querelle du déterminisme*, Paris, Gallimard, collection Le Débat, 350 p.

En prenant $k = 2$ et $x_0 = 0,16$, les opérations précédentes se retrouvent sur le graphique ci-dessous :

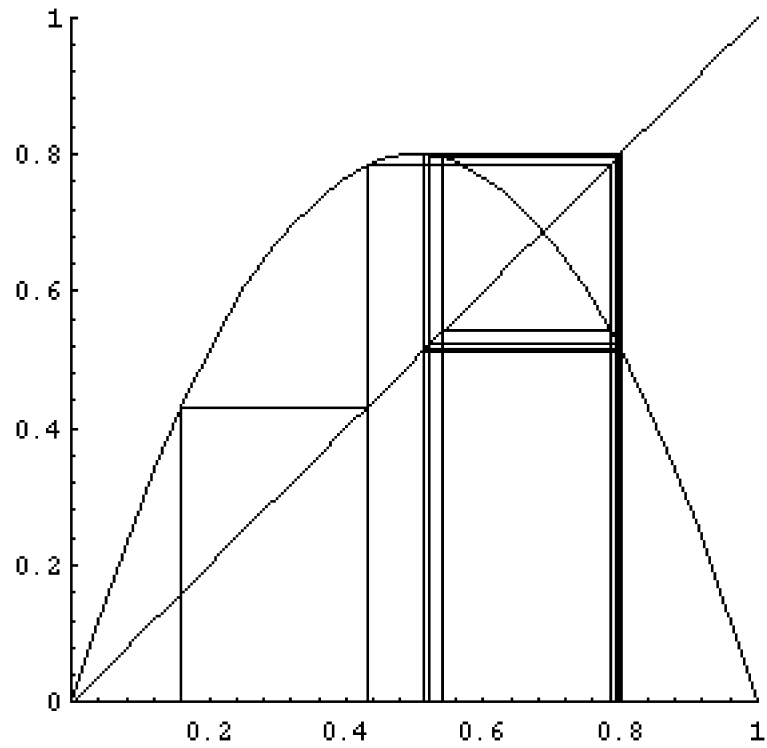


Après trente itérations, nous obtenons le graphique ci-dessous :



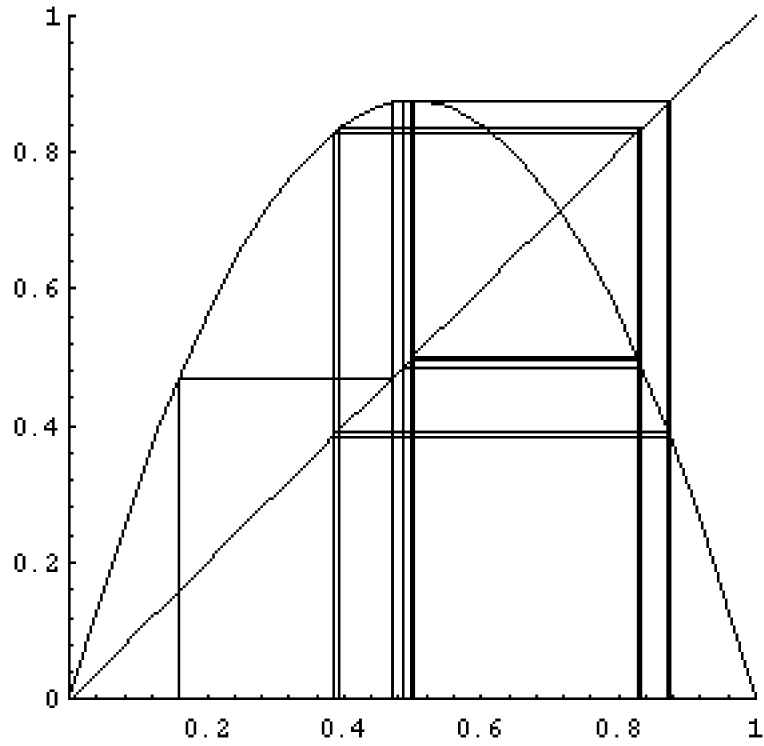
Nous retrouvons le résultat déjà obtenu : la population tend vers 0,5.

Si nous prenons $k = 3,2$, nous obtenons :



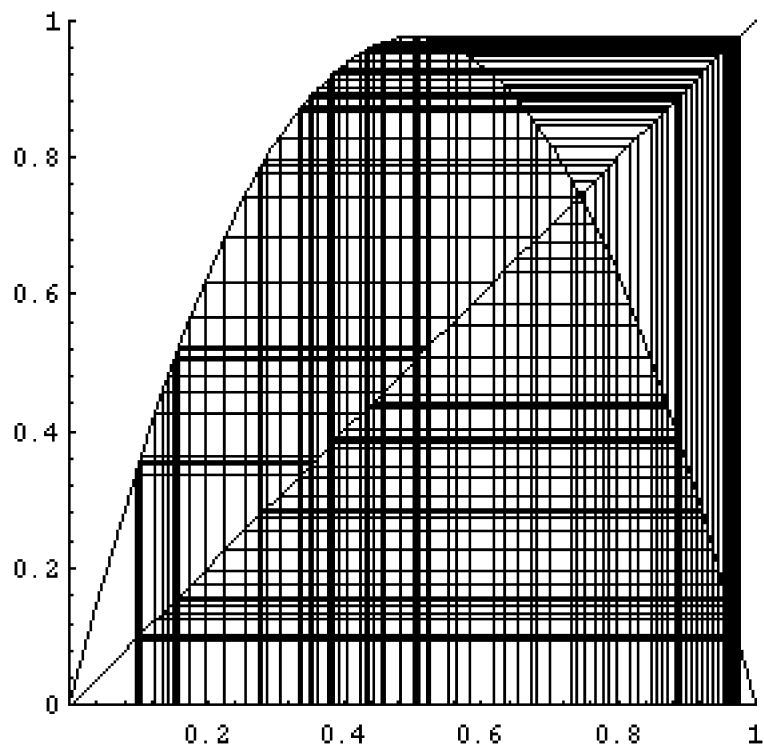
La population oscille alors entre 0,513 et 0,799.

Si nous prenons $k = 3,5$, nous obtenons :



La population oscille entre quatre valeurs : 0,382, 0,826, 0,874 et 0,500.

Pour $k = 3,9$, nous obtenons :



Nous sommes dans la zone « chaotique ». La population évolue un peu au hasard entre toutes les valeurs possibles.

Maintenant, avec du papier, un crayon et une règle, vous pouvez à votre tour explorer le comportement infiniment complexe de la fonction logistique, très simple, $y = f(x) = kx(1-x)$.

Annexe 2 Le traitement informatique

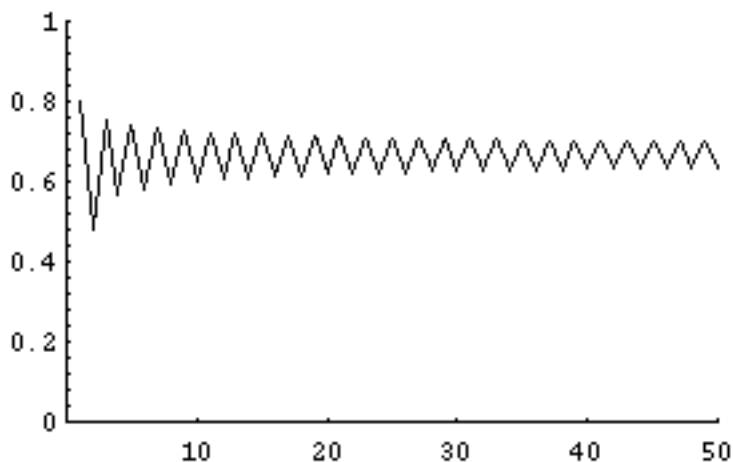
Les résultats obtenus n'ont pas été calculés « à la mitaine ». Pour le moindre résultat, la somme des calculs itératifs est telle que le recours à l'ordinateur est indispensable. Avec Lorenz, nous avons vu que la théorie du chaos est liée à l'informatique.

Pour vous permettre de retrouver et d'approfondir les résultats présentés, nous allons vous indiquer les commandes utilisées avec le logiciel *Mathematica*.

L'évolution des populations

Pour représenter l'évolution d'une population selon la population initiale x_0 et selon la valeur de la constante k , nous avons utilisé les instructions ci-dessous :

```
Clear[k, x, n, f, x0]
k=3;
x0=0.8;
n=50;
f[x_]:=k*x(1-x);
pop=NestList[f, x0, n];
ListPlot[pop, PlotJoined->True,
PlotRange->{{0, 50}, {0, 1}}, AxesOrigin->{0, 0}]
```



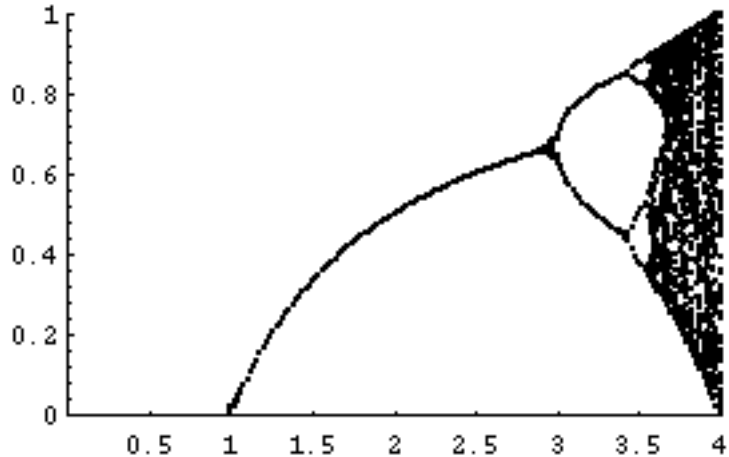
Le diagramme de Feigenbaum

Pour obtenir le diagramme de Feigenbaum, nous avons utilisé les instructions ci-dessous :

```

Clear[f,k,n,x,g,h,k,x]
x0=0.1;
f[x_]:=k*x(1-x);
g=Table[{k,Nest[f,x0,n]},{k,1,4,0.02},{n,30,130}];
h=Flatten[g,1];
ListPlot[h,Axes->True,PlotRange->{{0,4},{0,1}}]

```



Les instructions nécessaires pour obtenir cette figure sont très simples.

```

Clear[f,k,n,x,g,h];
x0=0.1
f[x_]:=k*x(1-x);
g=Table[{k,Nest[f,x0,n]},{k,1,4,0.02},{n,30,130}];

```

Nous voulons obtenir une série de points dont l'abscisse est une valeur du taux k et les ordonnées, des valeurs obtenues par applications successives un grand nombre de fois de la fonction logistique $f(x)$ à partir d'une valeur initiale déterminée. C'est la commande **Table[]** qui est la plus apte à ce type de calcul. Pour obtenir les couples définissant les coordonnées des points cherchés, nous demandons à *Mathematica*, à l'aide de la commande **Table[]**, de calculer des couples $\{k, \text{Nest}[f, 0.1, n]\}$ où le premier élément représentera des valeurs de k comprises entre 1 et 4 avec un pas de 0,02, et le second des applications successives, de 30 à 130 fois, de la fonction logistique, pour cette valeur de k , à une valeur initiale de x_0 . Cela représente un calcul intensif : pour chacune des 200 valeurs prises par k , il faut calculer 100 valeurs successives de la fonction logistique. Sur certains modèles d'ordinateurs, le temps demandé pour ce calcul peut même devenir prohibitif.

```

h=Flatten[g,1];
ListPlot[h,Axes->True,PlotRange->{{0,4},{0,1}}]

```

La commande **Flatten[]** permet de transformer la suite obtenue en une suite continue de couples, en supprimant le premier niveau d'accolades ; tandis que la commande **ListPlot[]** transforme cette suite en une suite de points sur un graphe.

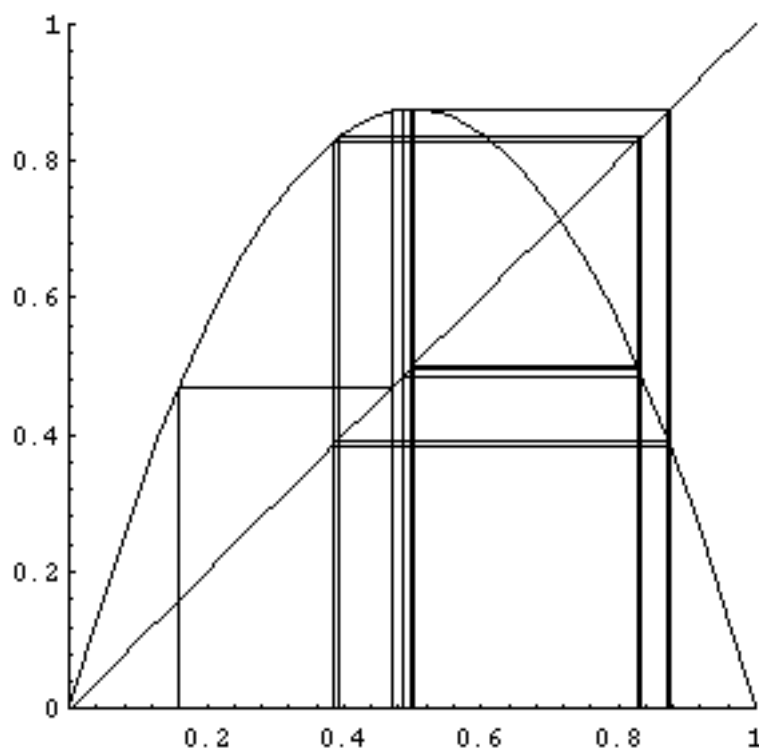
La méthode graphique

La méthode graphique peut aussi être traitée avec *Mathematica* :

Entrons les instructions ci-dessous :

```
Clear[f,g,k,h,l,m,n,x]
k=3.5;
x0=0.16;
f[x_]:=k*x(1-x);
g[x_]:=x;
m=Table[{
  {Nest[f,x0,n],0},
  {Nest[f,x0,n],Nest[f,x0,n+1]},
  {Nest[f,x0,n+1],Nest[f,x0,n+1]}},
{n,0,500}];
h=Flatten[m,1];
l=Graphics[Line[h]];
p=Plot[{f[x],g[x]},{x,0,1},AspectRatio->1];
Show[p,l,Axes->True,PlotRange->{{0,1},{0,1}}]
```

Nous obtenons la figure suivante :



Regardons brièvement chacune des instructions :

```
Clear[f,g,k,h,l,m,n,x];
```

```

k=3.5;
x0=0.16;
f[x_]:=k*x(1-x);
g[x_]:=x;

```

Ces instructions définissent la fonction logistique et la droite $y = x$ dont nous aurons besoin pour construire notre graphique :

```

m=Table[{
  {Nest[f,x0,n],0},
  {Nest[f,x0,n],Nest[f,x0,n+1]},
  {Nest[f,x0,n+1],Nest[f,x0,n+1]}},
{n,0,500}];

```

La commande **Table[]** s'applique à une liste de quatre couples. Chacun de ces couples représente les coordonnées d'un point. Les coordonnées de chacun de ces points font intervenir la commande **Nest[]**, car nous avons vu que chaque séquence est obtenue de la précédente en lui appliquant à nouveau la fonction logistique $f(x)$. Ici, la séquence est de rang n et la valeur initiale est x_0 . Nous l'appliquons trente fois et la séquence initiale est de rang "0". Nous obtenons une liste, que nous appelons m .

```

h=Flatten[m,1];

```

La liste m obtenue ne peut être transformée immédiatement en segments de lignes droites sur un graphique par la commande **Line[]**, car il y a un niveau d'accolades de trop. Pour que la commande **Line[]** puisse s'appliquer, il faut faire disparaître le premier niveau d'accolades de la liste m , et c'est le but de la commande **Flatten[]**. L'instruction **Flatten[m,1]** enlève le premier niveau d'accolades de la liste m . Nous obtenons ainsi une nouvelle liste, la liste h .

```

l=Graphics[Line[h]];
p=Plot[{f[x],g[x]},{x,0,1}];
Show[p,l,Axes->True,PlotRange->{{0,1},{0,1}}]

```

Philippe Etchecopar

Cégep de Rimouski