Annexe E.1 : Introduction au logiciel *Mathcad*

Exemples de calculs avec *Mathcad* :

Vous devez refaire les exemples présentés ci-dessous avant de commencer la partie en laboratoire. N'hésitez pas à demander de l'aide pour bien saisir les notions de base de *Mathcad*. Pour faire des calculs avec *Mathcad*, vous pouvez utiliser la palette **Arithmétique** de la façon suivante :

- Choisir le menu **Affichage**
- Choisir l'option **Barres d'outils**
- Choisir la palette **Arithmétique**

Vous devrez utiliser les flèches de déplacement, la barre d'espacement, la souris et la touche **delete** au besoin. Toute évaluation requiert le signe = et toute définition requiert le symbole **:=**.

Voici quelques exemples que vous pouvez compléter :

a) $2 \times 3 - 9 = -3$ **Pour faire calculer l'expression, on doit taper =**

b) $\dfrac{9^{\frac{3}{2}} \times 8}{5} = 43.2$

c) $\cos(\pi) + \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + 5 = 5$

d) $e^2 - 89 \times 2 = -170.611$

Note : Pour obtenir plus de 3 décimales (qui est l'option par défaut), on procède comme suit :

- Choisir le menu **Format**;
- Choisir l'option **Résultats…;**
- Dans la case **Précision affichée**, taper le nombre de décimales voulu.

e) $\dfrac{\sqrt{89} + 25}{53} = 0.649698$

f) $\dfrac{2^4 \cdot \ln(100)}{8} + -3 = 6.21034$

On peut aussi définir des variables pour ensuite faire des calculs sur celles-ci.

Exemple :

$a := 2$ **Pour faire apparaître :=, il faut taper la touche « : »**

$b := -6$

$c := 4$

Voici quelques calculs possibles :

$a + b + c = 0$

$2\ a - 3\ b = 22$

$c^{a} = 16$

$\frac{a \cdot b}{c} = -3$

Annexe E.2 : Laboratoire n° 1 : « Vecteurs et matrices »

Vous devez refaire les exemples présentés ci-dessous avant de commencer la partie en laboratoire. N'hésitez pas à demander de l'aide pour bien saisir les notions de base de *Mathcad*. La partie du travail pratique sera effectuée individuellement et sera à remettre.

Il est possible d'utiliser le logiciel *Mathcad* pour faire des calculs sur des vecteurs et des matrices. Certains calculs en algèbre linéaire peuvent s'avérer assez fastidieux, en particulier avec les matrices. L'utilisation du logiciel *Mathcad* permet de faire ces calculs très rapidement. Nous allons voir quelques exemples illustrant ce fait.

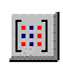
Partie 1 : Calculs avec les vecteurs

Pour *Mathcad*, un vecteur est interprété comme une matrice ayant une seule colonne. Par exemple le vecteur a = (1 ; 2 ; 3) s'écrira :

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Note : Prenez note que toute définition requiert le symbole **:=**
Pour afficher le symbole **:=**, on doit taper la touche « **:** »

La palette **Matrice** a été utilisée pour produire ce vecteur. Cette palette comprend toutes les opérations qui seront présentées dans ce laboratoire.



Il est possible de faire certaines opérations (que vous connaissez) sur les vecteurs. Procédons à l'aide d'exemples.

Soit les vecteurs suivants :

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e := \begin{bmatrix} 1.23432 \\ 2.324 \\ 3.35427 \end{bmatrix}$$

Les longueurs des vecteurs a, b et e sont :

$|a| = 3.742 \quad |e| = 4.263$
$|b| = 6.083$

Note : Pour faire une évaluation, on doit taper **=** et *Mathcad* procède alors au calcul voulu.

Le produit scalaire de c et d sera :

c x d = 3

Les produits vectoriels a x b et b x a seront :

$$a \times b = \begin{bmatrix} -18 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$b \times a = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Avec *Mathcad,* on peut facilement faire plusieurs produits vectoriels. Par exemple, (a x b) x (c x d) sera :

$$(a \times b) \times (c \times d) = \begin{bmatrix} 20 \\ -40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Le produit mixte (a, b, c) sera :

a x (b x c) = -40

Le vecteur unitaire a/|a| sera :

$$\frac{a}{|a|} = \begin{bmatrix} 0.267 \\ 0.535 \\ 0.802 \end{bmatrix}$$

Il est à noter que *Mathcad* mémorise la dernière définition d'une variable ou d'une valeur. Par exemple, si l'on définit un nouveau vecteur a = (1; 2; 0) que l'on rend unitaire, on aura :

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{a}{|a|} = \begin{bmatrix} 0.447 \\ 0.894 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il est évidemment possible de combiner plusieurs opérations sur les vecteurs et *Mathcad* les effectuera en respectant les priorités de ces opérations. Voici un exemple :

((a + (b x c)) – d) x b = 12

Il n'est pas obligatoire de définir des vecteurs à l'aide de variables pour faire des calculs. L'exemple suivant montre une autre façon de procéder toujours en utilisant la palette **Matrice** :

$$\left[\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}\right] \times \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -81 \\ -50 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Partie 2 : Calculs avec les matrices

Nous allons définir certaines matrices et effectuer des opérations sur ces dernières.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

La notation de la fonction « déterminant » est la même que celle déjà définie dans le cours. Par exemple :

$|A| = 0$ et $|C| = -75$

Le déterminant de B ne se calcule pas. Si vous essayez de faire ce calcul, vous aurez un message d'erreur.

On peut aussi transposer ou inverser (si possible) une matrice. Par exemple:

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} -0.083 & 0.542 & -0.083 & -0.333 \\ 0.167 & -1.083 & 0.667 & 0.667 \\ 0.042 & -0.021 & 0.042 & 0.167 \\ -0.167 & -0.417 & 0.333 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Si on tape :

$$A^{-1} =$$

cette commande vous donnera un message d'erreur. Rappelons qu'une matrice singulière a un déterminant nul et, par conséquent, elle n'est pas inversible.

Les autres opérations déjà définies sur les matrices s'effectuent facilement avec *Mathcad*. Par exemple :

$$3A - 2C = \begin{bmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 16 & 15 & 28 \\ 7 & 12 & 19 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 16 & 25 \\ 24 & 54 & 84 \end{bmatrix} \qquad D \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 & 3 \\ 14 & 6 & 12 & 18 \\ 8 & 6 & 12 & 18 \\ 19 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

On peut également faire une « évaluation symbolique » avec certaines variables. Par exemple :

$$\left| \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right|$$
$$i - k$$

Pour faire ce calcul, il faut choisir l'option **Évaluer symboliquement** du menu **Symbolique**.

Il est possible d'utiliser la méthode de Cramer avec *Mathcad*. Il faudra bien sûr utiliser les calculs de déterminants de façon adéquate.

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$2x - y + 3z = 3$
$-7x + 3y - 5z = -5$
$-x + 2y - z = -1$

On peut trouver x, y et z de la façon suivante :

$$x := \frac{\left| \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right|}{\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right|} \qquad y := \frac{\left| \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -7 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right|}{\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right|} \qquad z := \frac{\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right|}{\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right|}$$

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

Rappelons que la méthode de Cramer est valable pour les systèmes admettant une solution unique seulement.

Annexe E.3 : Travail pratique 1

Ce premier travail compte pour **4 %** de la note finale. C'est un travail individuel et vous avez droit à toute documentation. Vous devez remettre votre disquette bien identifiée à la fin du cours. Vous sauvegardez ce travail sous le nom : ***Travail 1***. Bonne chance !

Vous devez utiliser des **zones de texte** pour bien identifier les réponses de ces problèmes. Il n'est pas nécessaire de recopier les énoncés des exercices demandés. Voici comment créer une zone de texte :

- Choisir le menu **Insertion**;
- Choisir l'option **zone de texte**;

ou

- Utiliser le raccourci de clavier **"**.

À l'aide du logiciel *Mathcad*, trouver les réponses aux exercices demandés.

1. Définir les vecteurs suivants selon la convention utilisée pour *Mathcad* :

   $\vec{a} = (1;2;-6)$
   $\vec{b} = (4;-3;-9)$
   $\vec{c} = (0;-7;2)$
   $\vec{d} = (-3;8;1)$
   $\vec{e} = (2;2;5)$
   $\vec{f} = (12;8;-3)$

   Effectuer les calculs demandés (**30 points**).

   a) $(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{d}-\vec{e})$

   b) $\vec{b}\times(\vec{d}\times\vec{e})-\vec{f}$

   c) Rendre le vecteur $(\vec{b}+\vec{c})$ unitaire.

   d) $(\vec{a}\times\vec{c})(\vec{f})$

   e) Trouver le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$.

f) Est-ce que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{c}$ et $\vec{e}$ sont coplanaires (justifier)?

2. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 8 \\ -7 & 5 & 4 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -5 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 8 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

Trouver la réponse pour chacun des calculs demandés (**40 points**).

a) $|A|$
b) AB
c) 2D - CD
d) D^{-1}
e) $C^{-1}D^{-1}$
f) $(AB)^t$
g) B^tA^t
h) BA

3. Résoudre les systèmes d'équations suivants à l'aide de la règle de Cramer (**20 points**) :

a)
$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= -1 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z - t &= 4 \\ 2x - y + z + t &= 7 \\ 3x + 2y - 2z + t &= 2 \\ 5x - 2y - z + t &= 0 \end{aligned}$$

4. Dans la base naturelle $B = \{\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\}$ considérons les vecteurs $\vec{a} = (2;1;-3)$ $\vec{b} = (-1;2;-7)$ et $\vec{c} = (2;-5;1)$.

   Trouver (**10 points**) :

   a) la longueur du vecteur $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$
   b) la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{c}$

Annexe E.4 : Réponses au travail pratique 1

1. $a := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ $b := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$ $c := \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$ $d := \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ $e := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $f := \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$

a) $(a + c) \times (d - e) = \begin{bmatrix} 44 \\ 24 \\ -19 \end{bmatrix}$

b) $b \times (d \times e) - f = \begin{bmatrix} 207 \\ -262 \\ 185 \end{bmatrix}$

c) $\dfrac{(b + c)}{|b + c|} = \begin{bmatrix} 0.311 \\ -0.778 \\ -0.545 \end{bmatrix}$

d) $(a \cdot c) \cdot f = \begin{bmatrix} -312 \\ -208 \\ 78 \end{bmatrix}$

e) $V := \begin{bmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 12 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

Le volume du parallélépipède est donné par la valeur du déterminant de V :
$|V| = 658$ u^3

f) $P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad |P| = -115$

On voit que le produit mixte des vecteurs considérés ne donne pas 0.
Donc, ces vecteurs ne sont pas coplanaires.

2. $A := \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 8 \\ -7 & 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ $\quad B := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -5 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad C := \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad D := \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 8 & 9 & -7 \end{bmatrix}$

a) $|A| = 2.134 \quad \text{x } 10^{3}$

b) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & 4 & -3 \\ -10 & 7 & -2 \\ 6 & 22 & 42 \\ -22 & -31 & -47 \end{bmatrix}$

c) $2 \cdot D - C \cdot D = \begin{bmatrix} -37 & -21 & 28 \\ 8 & -7 & -2 \\ -21 & -23 & 7 \end{bmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.396 & 0.321 & -0.113 \\ 0.132 & -0.226 & -0.038 \\ 0.623 & 0.075 & -0.321 \end{bmatrix}$

e) $C^{-1} \cdot D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.077 & 3.56 \cdot 10^{-3} & -0.043 \\ -0.104 & 0.111 & 0.041 \\ 0.191 & -0.061 & -0.057 \end{bmatrix}$

f) $(A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 22 & -10 & 6 & -22 \\ 4 & 7 & 22 & -31 \\ -3 & -2 & 42 & -47 \end{bmatrix}$

g) $B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 22 & -10 & 6 & -22 \\ 4 & 7 & 22 & -31 \\ -3 & -2 & 42 & -47 \end{bmatrix}$

h) $\mathrm{rang}(A) = 4$

3. a) $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $X := \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $Y := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $Z := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$x := \frac{|X|}{|A|}$ $x = 1$

$y := \frac{|Y|}{|A|}$ $y = -2$

$z := \frac{|Z|}{|A|}$ $z = 3$

b) $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $X := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $Y := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $Z := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x := \dfrac{|X|}{|A|} \quad y := \dfrac{|Y|}{|A|} \quad z := \dfrac{|Z|}{|A|} \quad t := \dfrac{|T|}{|A|}$

$x = 1$

$y = 2$

$z = 4$

$t = 3$

4. $a := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) $|a + 2 \cdot b - 3 \cdot c| = 28.914$

b) $\dfrac{a \cdot c}{|c|} = -0.73$

Annexe E.5 : Laboratoire n° 2 « Systèmes d'équations »

PARTIE 1 : EXEMPLES À COMPLÉTER EN CLASSE

Résolution d'un système d'équations

Mathcad vous permet de résoudre un système comportant jusqu'à 50 équations et 50 inconnues. Voici quelques exemples illustrant la façon de procéder pour résoudre une ou des équations :

Exemple 1 : Résolution d'un système d'équations linéaires (n équations, n inconnues).

Résoudre le système suivant à l'aide de la fonction **linsys(A,b)** intégrée dans *Mathcad* :

$x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 3$

$2x_1-3x_2+5x_3-x_4 = 6$

$-x_1+6x_2-7x_3+3x_4 = -7$

$3x_1+x_2-x_3+2x_4 = 5$

Nous allons définir la matrice des coefficients A relative à ce système d'équations :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 6 & -7 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur représentant les constantes est donné par b où :

$$b := \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Activité réalisée au Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue par Daniel Ritchie, éditée par le Saut quantique.

La fonction **linsys(A,b)** donne la solution du système d'équations :

$$\text{linsys}(A,b) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Note : La fonction **linsys(A,b)** est valide ***uniquement*** pour un système de n équations à n inconnues. Pour tout autre système d'équations linéaires, il est préférable d'utiliser la matrice augmentée.

Exemple 2 : Résolution d'un système d'équations à l'aide de la matrice augmentée.

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$2x - y + z = 4$
$-3x + 2y - z = 10$

La matrice des coefficients est :

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des constantes est :

$$b := \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Vérifions le rang de A à l'aide de la fonction **rang(A**) :

$\text{rang}(A) = 2$

On peut produire la matrice augmentée du système à l'aide de la fonction **augment(A,b)**.

Appelons cette matrice C :

$C := \text{augment}(A, b)$ et $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

Le rang de C est : $\text{rang}(C) = 2$

Le système admet donc une infinité de solutions.

La fonction **rref** donne la forme escalier d'une matrice et nous permet d'identifier les conditions requises pour les solutions du système. Pour la matrice C, **rref(C)** sera :

$$\mathrm{rref}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \end{bmatrix}$$

Donc y = 32 - z et x = 18 - z

On peut utiliser la méthode de la matrice inverse pour trouver la solution unique de certains systèmes d'équations.

Exemple 3 : Soit le système d'équations :

2x - 3y + 4z = 8

-3x + 4y - 2z = -1

x - y + 3z = 2

Comme le système est équivalent à AX = B, on a que X = A^{-1}*B.

Définissons la matrice des coefficients :

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Définissons la matrice des constantes :

$$B := \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Effectuons le produit matriciel nous donnant les valeurs des variables :

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exercices à compléter :

Résoudre les systèmes suivants avec la fonction **linsys(A,b)** du logiciel *Mathcad* :

1. $$2x - y = -5$$
   $$-3x + y = 3$$

2. $$x + y + z = 4$$
   $$3x - y + 2z = 1$$
   $$2x + 5y - 3z = 22$$

3. $$2x + 3y + z + 4t = 4$$
   $$x - 3y + z + 2t = 0$$
   $$4x + 3y - 2z + 4t = 8$$
   $$12x + 12y + 5z + 4t = 8$$

Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de la matrice augmentée de *Mathcad* :

4. $$x + y + z - 2t + s - v = 3$$
   $$x + y + z + t + s + v = 10$$
   $$x - y + 6z + t + s + 2v = 11$$
   $$2x + y + z + 4t - s + v = 2$$
   $$3x + 3t + s - 2v = -7$$
   $$-y - s + v = 0$$

Résoudre le système suivant à l'aide de la matrice augmentée :

5. $$2x + 3y - z = -1$$
   $$x + y + 2z = -3$$
   $$x + 2y - 3z = 2$$

Réponses :

1. $x = 2$ et $y = 9$

2. $x = 2$, $y = 3$ et $z = -1$

3. $x = 1/2$, $y = 1/3$, $z = -1$ et $t = 3/4$

4. $x = 1; y = 2; z = 0; t = -1; s = 3; v = 5$

5. $x = -8 - 7z; y = 5 + 5z$

Annexe E.6 : Travail pratique 2

Ce deuxième laboratoire compte pour **3 %** de la note finale. C'est un travail individuel à remettre une semaine avant la fin de la session. Sauvegarder le travail sous le nom : ***Travail 2***. Seule la disquette de travail est à remettre et elle doit être **clairement identifiée**.

Vous devez répondre aux exercices suivants à l'aide du logiciel *Mathcad*. Vous travaillez comme si vous n'aviez pas de calculatrice. Il n'est pas nécessaire de recopier les énoncés des exercices. Ces exercices sont pris dans le manuel scolaire : Gilles Ouellet (1994). *Algèbre linéaire*, Éditions du Griffon d'Argile, Ste-Foy, 476 p.

Exercices à faire :

p.391 n° 6 (10 points)
n° 8 (6 points)
n° 9 (6 points)

p.392 n° 13 (6 points)
n° 15 (6 points)
n° 16 (6 points)

p.393 n° 23 (12 points)
n° 26 a) (6 points)
n° 26 b) (6 points)
n° 28 a) (6 points)
n° 28 b) (12 points)
n° 30 (6 points)
n° 35 (7 points)

Présentation et orthographe (5 points)

Vous devez clairement identifier vos solutions à l'aide de zones de texte. Voici deux exemples de solutions acceptables :

Exemple 1 (page 391, n° 10) :

Trouver les équations d'une droite passant par le point P1 : (4, 5, -7) et parallèle à chacun des plans d'équations :

$x + y - 6z + 4 = 0$ et $3x - 2y + z = 0$

10. $n := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ $m := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $n \times m = \begin{bmatrix} -11 \\ -19 \\ -5 \end{bmatrix}$

Avec le point (4, 5, -7) on trouve : $\Delta : \dfrac{x - 4}{-11} = \dfrac{y - 5}{-19} = \dfrac{z + 7}{-5}$

Exemple 2 (p. 392, n° 12)

Trouver des équations d'une droite passant par le point milieu du segment joignant les points A : (1, 2, 0) et B : (3, -2, 4) et perpendiculaire à chacune des droites.

$$\Delta_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{5} \quad \text{et} \quad \Delta_2 : \begin{cases} 4x + 2y - z + 3 = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

12. $A := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $B := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $M := \dfrac{A + B}{2}$ $M = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$a := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $n := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $m := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $b := n \times m$ $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$

$a \times b = \begin{bmatrix} 33 \\ 19 \\ -17 \end{bmatrix}$

Donc, la droite voulue est $\Delta : \dfrac{x - 2}{33} = \dfrac{y - 0}{19} = \dfrac{z - 2}{-17}$

Annexe E.7: Réponses au travail pratique 2

6. a) Les matrices associées au système d'équations sont :

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad a := \begin{bmatrix} -3 \\ -15 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{linsys}(A, a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. b) $$n := \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a := \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \sin(A) := \frac{n \cdot a}{|n| \cdot |a|}$$

$\sin(A) = 0.8645$

$\arcsin(0.8645) = 59.826\ \mathrm{deg}$

$\arcsin(\sin(A)) = 59.829\ \mathrm{deg}$

8. $$n := \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad a := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad n \text{ x } a = 0$$

9. $$n := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad n \times m = \begin{bmatrix} 9 \\ -19 \\ -11 \end{bmatrix} \qquad m := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Donc, la droite voulue est $\Delta: \dfrac{x-3}{9} = \dfrac{y+4}{-19} = \dfrac{z-2}{-11}$

13. $$a := \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad n := \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad m := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b := n \times m$$

Le vecteur a est parallèle à la droite 1 et le vecteur b est parallèle à la droite 2. Vérifions leur produit scalaire :

a x b = 0

Donc, les droites 1 et 2 sont perpendiculaires.

15. $n := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $m := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a := n \times m$

le vecteur a est parallèle à la droite 1.

$p := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $q := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $b := p \times q$

le vecteur b est parallèle à la droite 2.

a x b = 0

Donc, les droites 1 et 2 sont perpendiculaires.

16. $a := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ $b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $a \times b = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

La droite voulue est Δ: $\frac{x+4}{-11} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$

23. Les matrices pour trouver le point demandé sont :

$A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ $a := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\text{linsys}(A, a) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$n := \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad m := \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad n \times m = \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 21 \end{bmatrix} \quad a := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Le cosinus de l'angle entre les deux droites est :

$$\frac{a \cdot (n \times m)}{|a| \cdot |n \times m|} = 0.73468$$

et l'angle est :

$$\arccos(0.734684) = 42.719 \quad deg$$

26. a) $a := \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ $A := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $P_0 := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B := P_0 - A$

$$D := \frac{|a \times B|}{|a|}$$

$D = 4.667$

26. b) $a := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $A := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ $P_0 := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B := P_0 - A$ $B = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$D := \frac{|a \times B|}{|a|}$$

$D = 0$

28. a) $P_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ $P_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $V := P_2 - P_1$

$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $b := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$D := \dfrac{V \cdot (a \times b)}{|a \times b|}$

$D = 0.704$

28. b) Trouvons un point de la droite 1 avec x = 0 :

$C := \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $c := \begin{bmatrix} 52 \\ 8 \end{bmatrix}$ $A := \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 11 \end{bmatrix}$ $\text{linsys}(C, c) = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$

Trouvons un point de la droite 2 avec x = 0 :

$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $c := \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\text{linsys}(C, c) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $V := B - A$ $m := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $n := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$p := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $q := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a := m \times n$

$b := p \times q$

$D := \dfrac{|V \cdot (a \times b)|}{|a \times b|}$

$D = 6.285$

30. Des équations de la droite, on tire les équations suivantes :

$7x - y = 19$
$4x - z = 11$

En tenant compte de l'équation du plan, on a les matrices suivantes concernant le système d'équations :

$$A := \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad a := \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{linsys}(A, a) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

35. $$A := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad M := \frac{A+B}{2} \qquad M = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur a parallèle à la droite 1 est :

$$a := \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur b parallèle à la droite 2 est :

$$m := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad n := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b := m \times n \quad b = \begin{bmatrix} 27 \\ -9 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Le vecteur c parallèle à la droite cherchée est :
$c := a \times b$

$$c = \begin{bmatrix} -138 \\ 18 \\ -162 \end{bmatrix}$$

La droite cherchée est $\Delta : \dfrac{x-3}{-138} = \dfrac{y-1}{18} = \dfrac{z-2}{-162}$