

## Annexe E.1 : La relativité restreinte à l'aide de diagrammes

Voici une présentation des principaux éléments de la relativité restreinte à l'aide d'un diagramme dont la propriété principale est de conserver l'intervalle espace-temps  $(ct)^2 - (x)^2 = (ct')^2 - (x')^2$ . Le diagramme ressemble aux diagrammes connus en relativité (Brehme<sup>1</sup>), mais il a été simplifié à deux axes seulement, pour les coordonnées (x et ct), et à deux projections perpendiculaires à ces axes, pour les coordonnées (x' et ct'). Le diagramme a aussi la particularité d'être similaire à celui utilisé en mécanique classique. Le lecteur comprendra d'abord la notion d'événement à l'aide du diagramme utilisé en mécanique classique et il y verra ensuite qu'une simple modification à ce diagramme pour tenir compte de la valeur constante de la vitesse de la lumière. De plus, les coordonnées d'un événement pourront être obtenues par des mesures directes sur le diagramme lorsque celui-ci est fait à l'échelle.

### I. INTRODUCTION

Présenter les principaux éléments de la relativité restreinte, en quelques heures seulement, devient possible à l'aide de ce nouveau diagramme. Dans une première section, je vous présente la relativité galiléenne et le diagramme espace-temps utilisé pour illustrer différents événements. Ce diagramme ne sera que légèrement modifié pour tenir compte de la valeur constante de la vitesse de la lumière dans une deuxième section. Le diagramme montrera clairement la relativité de la simultanéité, la dilatation de l'intervalle de temps propre et la contraction des longueurs au repos. De plus, le diagramme permettra d'établir la transformation de Lorentz ainsi que les équations de la dilatation de l'intervalle de temps propre et de la contraction des longueurs au repos. À mon avis, le diagramme représente un outil pédagogique efficace pour aider à comprendre rapidement la relativité restreinte.

---

<sup>1</sup> BREHME, Robert W. (1962), « A Geometric Representation of Galilean and Lorentz Transformations », *American Journal of Physics*, Vol. 30, p. 489.

## II. LA RELATIVITÉ GALILÉENNE

### A. Événement et coordonnées d'un événement

En relativité, un événement est une « chose » qui a lieu à un endroit donné dans l'espace et à un moment donné dans le temps. On peut désigner cet événement à l'aide de coordonnées spatio-temporelles  $(x, y, z, t)$  relatives à un référentiel  $K$  dont l'origine  $O$  est à la position  $(0; 0; 0)$ . La coordonnée temporelle ( $t$ ) peut être obtenue à l'aide de l'heure indiquée à une horloge placée tout près de l'endroit où a lieu l'événement. Imaginons deux référentiels  $K$  et  $K'$ , dont les origines coïncident à l'instant  $t = 0$ ; le référentiel  $K'$  se déplace à une vitesse ( $v$ ) le long de l'axe des  $X$  par rapport au référentiel  $K$ . Soit un événement ( $E$ ) de coordonnées  $(x, y, z, t)$  pour le référentiel  $K$  et de coordonnées  $(x', y', z', t')$  pour le référentiel  $K'$  (Fig. 1).

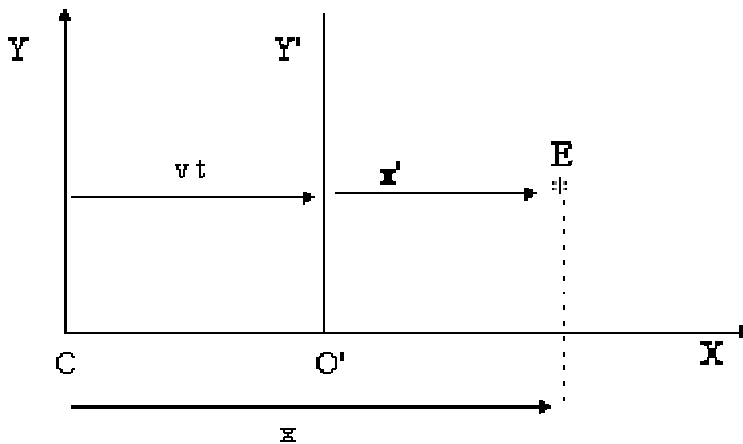


Fig. 1. Coordonnées d'un événement et transformation de Galilée

Ainsi, pour tout événement ( $E$ ), on aura toujours :  $x' = x - vt$ , et en faisant l'hypothèse que le déroulement du temps est le même dans les deux référentiels, on peut écrire :  $t' = t$ . Comme il n'y a aucun déplacement le long des axes  $Y$  et  $Z$ , on écrira aussi :  $y' = y$  et  $z' = z$ . Ces quatre équations constituent *la transformation de Galilée*.

## B. Diagramme espace-temps de la mécanique classique

Pour illustrer la position d'un événement ou le mouvement d'une particule, on utilise un diagramme espace-temps (Fig. 2).

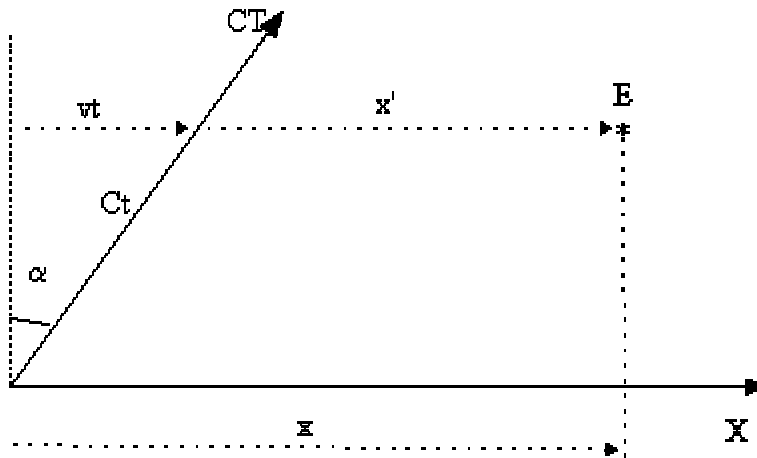


Fig. 2. Événement dans un diagramme espace-temps et transformation de Galilée

En inclinant l'axe du temps d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, on peut représenter plusieurs événements sur un même diagramme, et pour les deux référentiels à la fois. L'axe du temps (incliné), associé à une constante arbitraire  $C$  dont les unités sont celles d'une vitesse, possède alors les mêmes unités que l'axe des  $X$  et on a  $\sin(\alpha) = v/C$ . La coordonnée ( $x$ ) d'un événement ( $E$ ) est obtenue à l'aide d'une projection verticale sur l'axe des  $X$ . Les coordonnées ( $Ct$ ) et ( $x'$ ) sont obtenues à l'aide d'une projection parallèle à l'axe des  $X$ . La coordonnée temps ( $Ct$ ) correspond à la longueur définie sur l'axe du temps par la projection horizontale. La coordonnée ( $x'$ ) correspond à la longueur horizontale entre l'événement et l'axe du temps. Toutes ces coordonnées peuvent être positives ou négatives. Le diagramme montre bien la relation :

$x' = x - vt$  de la transformation de Galilée.

## C. Contradiction pour la vitesse de la lumière

Imaginons un éclair de lumière produit à  $x = 0$ , instant où les deux référentiels coïncident. La position du front d'onde de lumière le long de l'axe des  $X$  pour le référentiel  $K$  peut être donnée par l'équation  $x = ct$  où  $c$  est la vitesse de la lumière pour le référentiel  $K$ . La transformation de Galilée nous donne  $x' = x - vt$  donc  $x' = (c - v)t$ . Considérant que  $t = t'$ , on obtient  $x' = (c - v)t'$ . Ainsi la vitesse du front d'onde pour le référentiel  $K'$  serait de  $(c - v)$ , une vitesse différente de

celle du référentiel K. Ce résultat est en contradiction avec les observations faites au sujet de la lumière. En effet, toutes les mesures confirment la valeur constante ( $c$ ) pour la vitesse de la lumière dans le vide, quel que soit le mouvement de l'observateur. Il faut revoir notre équation  $x' = x - vt$  et notre diagramme afin d'obtenir  $x' = ct'$  pour le référentiel K'.

### III. LA RELATIVITÉ RESTREINTE

#### A. Postulats de la relativité restreinte et ses conséquences

- i) Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.
- ii) La vitesse de la lumière possède une valeur constante ( $c$ ) dans tous les référentiels inertiels.

Imaginons K et K', deux référentiels; K' se déplaçant avec une grande vitesse  $v$  le long de l'axe des X par rapport à K. Imaginons deux horloges pour mesurer le temps ( $t$  dans K) et ( $t'$  dans K'). Posons que lorsque l'origine O' coïncide avec O, les horloges se synchronisent et indiquent :  $t = t' = 0$ . Enfin, à cet instant  $t = t' = 0$ , imaginons qu'un éclair de lumière est émis dans toutes les directions comme l'indique le schéma de la Fig. 3 (a).

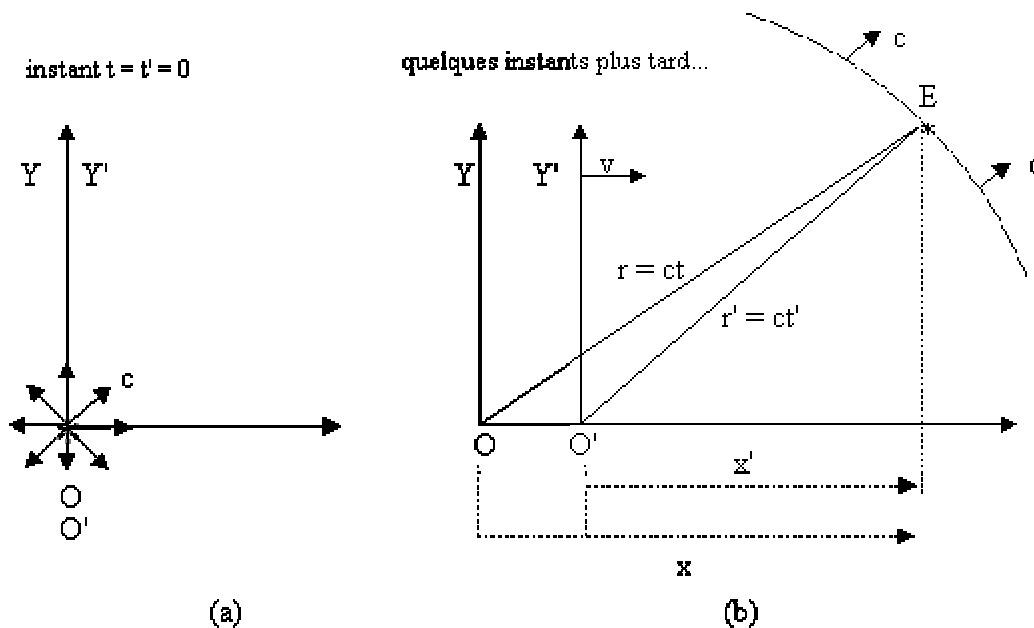


Fig. 3. Situation pour un front d'onde de lumière

Quelques instants plus tard, le front de lumière émise se trouve à une distance  $r = ct$  autour de l'origine  $O$  dans toutes les directions (Fig. 3 (b)),  $r$  étant le rayon de la sphère de lumière autour de  $O$ . Mais il faut que le front de lumière émise se retrouve aussi à une distance  $r' = ct'$  autour de l'origine  $O'$  puisque la lumière doit s'éloigner à la même vitesse dans toutes les directions, quel que soit l'observateur. De ce schéma, on tire les équations suivantes :

$$r = ct \text{ et } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow (ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On a aussi :

$$r' = ct' \text{ et } (r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \Rightarrow (ct')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2.$$

Considérant que :  $y' = y$  et  $z' = z$ , on obtient la relation très importante :

$$(ct)^2 - (x)^2 = (ct')^2 - (x')^2$$

C'est uniquement sur cette équation que nous bâtissons les équations de la transformation des coordonnées.

## B. Diagramme espace-temps de la relativité restreinte

Imaginons un événement quelconque (E) ayant lieu aux coordonnées  $(x, y, z, t)$  dans le référentiel  $K$  et aux coordonnées  $(x', y', z', t')$  dans le référentiel  $K'$ . Considérons le diagramme de la Fig. 4 où l'axe du temps a été incliné d'un angle  $(\alpha)$  par rapport à la verticale.

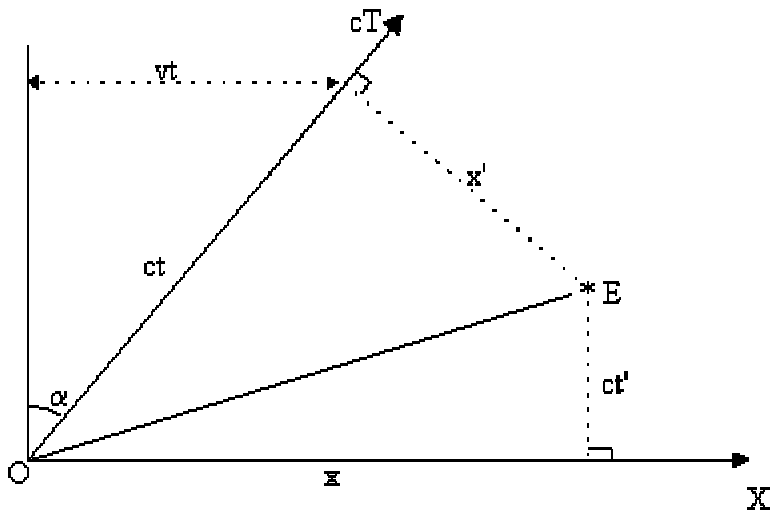


Fig. 4. Diagramme espace-temps de la relativité restreinte

Dans ce diagramme, la coordonnée ( $x$ ) est obtenue à l'aide d'une projection perpendiculaire à l'axe des  $X$  et la coordonnée ( $ct$ ) est aussi obtenue à l'aide d'une projection perpendiculaire à l'axe du temps. La coordonnée ( $x'$ ) correspond à la longueur entre l'événement ( $E$ ) et l'axe du temps. De même, la coordonnée ( $ct'$ ) correspond à la longueur entre l'événement ( $E$ ) et l'axe des  $X$ . On acceptera que toutes ces coordonnées puissent être positives ou négatives. L'axe du temps ( $ct$ ) a été incliné d'un angle ( $\alpha$ ) tel que  $\sin\alpha = vt/ct$ , c'est-à-dire  $\sin\alpha = v/c$  où ( $v$ ) est la vitesse de  $K'$  par rapport à  $K$  et ( $c$ ) est la vitesse de la lumière dans le vide. On explique cet angle ( $\alpha$ ) en considérant que tout événement ayant lieu à la position ( $x' = 0$ ) pour le référentiel  $K'$  doit être à ( $x = vt$ ) pour le référentiel  $K$ . Les deux triangles-rectangles de même hypoténuse ( $OE$ ) de ce diagramme montrent que :

$$(ct)^2 + (x')^2 = (x)^2 + (ct')^2$$

Cette équation est tout à fait équivalente à  $(ct)^2 - (x)^2 = (ct')^2 - (x')^2$ , quel que soit le lieu de l'événement ( $E$ ). C'est donc à partir de ce diagramme que nous construirons nos équations de la transformation de coordonnées. Ces coordonnées  $x'$  et  $ct'$  peuvent être obtenues à l'aide de projections perpendiculaires à des axes  $X'$  et  $ct'$  tournées en sens opposé par rapport aux axes  $X$  et  $ct$  respectivement (voir l'annexe à la fin de ce texte).

### C. Relativité de la simultanéité

Considérons les deux événements ( $E_1$  et  $E_2$ ) illustrés sur le diagramme espace-temps de la Fig. 5.

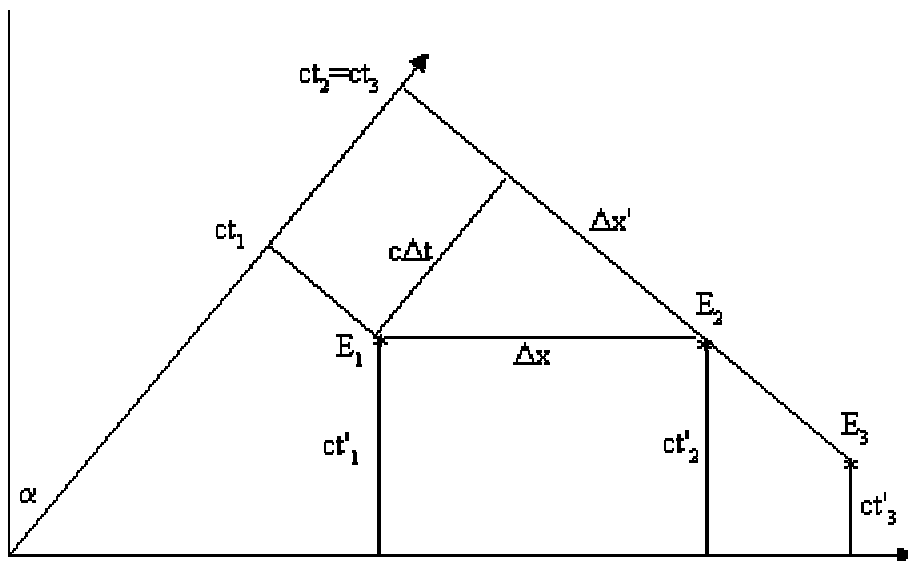


Fig. 5. Relativité de la simultanéité.

Étant donné que les deux événements ont lieu en même temps pour le référentiel K',  $ct'_1 = ct'_2$ , les événements sont dits simultanés pour le référentiel K'. Le diagramme montre bien que les deux événements ne sont pas simultanés pour le référentiel K ( $ct_1 < ct_2$ ). La simultanéité est donc relative au référentiel.

L'intervalle de temps ( $c\Delta t$ ) peut être obtenu à l'aide de la relation  $c\Delta t = \Delta x' \tan(\alpha)$ . De même, les événements ( $E_2$ ) et ( $E_3$ ), simultanés pour le référentiel K, ( $ct_2 = ct_3$ ), ne sont pas simultanés pour le référentiel K' ( $ct'_2 > ct'_3$ ).

#### D. Transformation de Lorentz

Imaginons deux référentiels K et K', K' se déplaçant à une vitesse constante ( $v$ ) le long de l'axe des X par rapport au référentiel K,  $t = t' = 0$  lorsque O' coïncide avec O. Soit un événement (E) ayant lieu à un endroit donné dans l'espace et à un moment donné dans le temps :

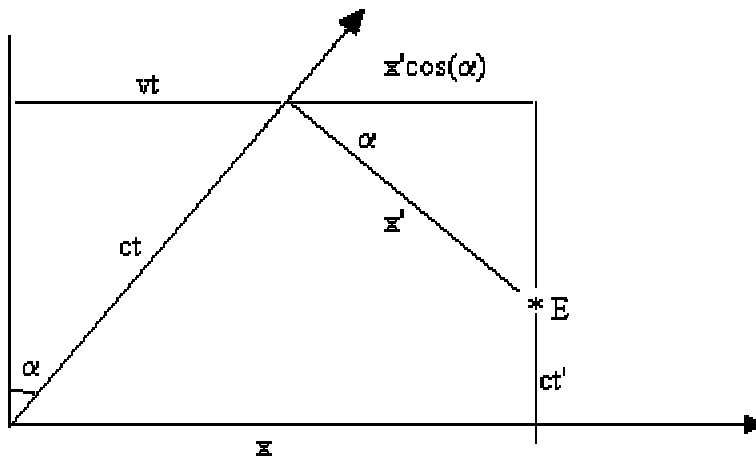


Fig. 6. Transformation de Lorentz pour la position

Posons  $\beta = \frac{v}{c} = \sin \alpha \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \beta^2}$

Le diagramme de la Fig. 6 montre bien.  $x' \cos(\alpha) = x - vt \Rightarrow x' = \frac{x - vt}{\cos(\alpha)} \Rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

De même, le diagramme de la Fig. 7 montre que :

$$ct' \cos(\alpha) = ct - x \sin(\alpha) \Rightarrow ct' = \frac{ct - x \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

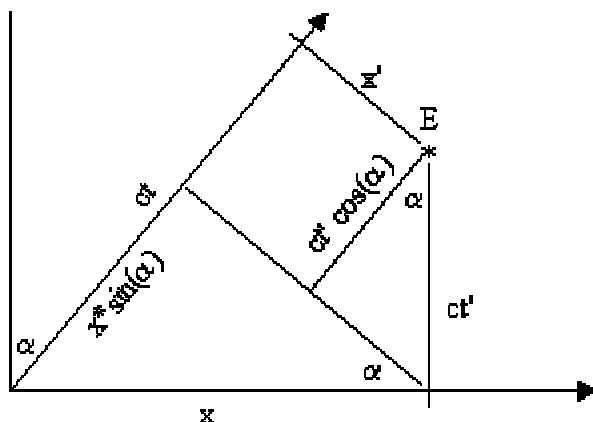


Fig. 7. Transformation de Lorentz pour le temps

Soit :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad y' = y \quad \text{et} \quad z' = z$

ces équations constituent la transformation de Lorentz et elles tendent vers la transformation de Galilée lorsque ( $v \ll c$ ).

### E. Dilatation de l'intervalle de temps propre

Considérons les deux événements ( $E_1$  et  $E_2$ ) illustrés sur le diagramme espace-temps de la Fig. 8. Les deux événements ayant lieu au même endroit ( $x'_1 = x'_2$ ) pour le référentiel  $K'$ , on dit que l'intervalle de temps ( $\Delta t'$ ) entre les deux événements est un *intervalle de temps propre* pour le référentiel  $K'$ . Le diagramme montre bien que l'intervalle de temps ( $\Delta t$ ) pour le référentiel  $K$  est plus long que ( $\Delta t'$ ). Ce phénomène est appelé *dilatation de l'intervalle de temps propre*.

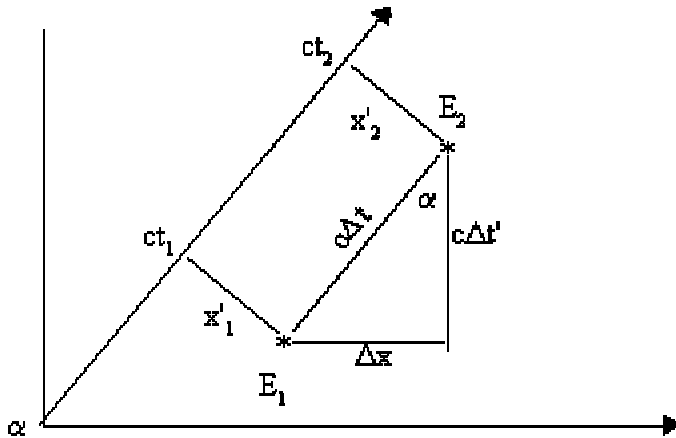


Fig. 8. Temps propre dans K'. Temps dilaté dans K.

Considérant la figure triangulaire du diagramme, on a :  $\Delta t = \frac{\Delta t'_{propre}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Par contre, dans le diagramme de la Fig. 9, c'est dans le référentiel K qu'on a l'intervalle de

temps propre puisque  $x_2 = x_3$  et on a :  $\Delta t' = \frac{\Delta t_{propre}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

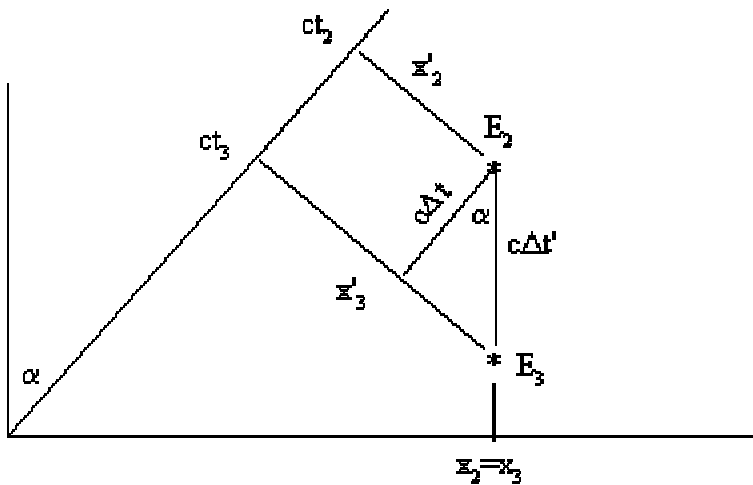


Fig. 9. Temps propre dans K. Temps dilaté dans K'.

## F. Contraction des longueurs

La distance entre les deux droites inclinées de la Fig. 10, représente une longueur ( $\Delta x'$ ) constante, et au repos, pour le référentiel K'. Il est facile de la mesurer puisqu'elle est au repos dans ce référentiel (K'). Mais pour que cette longueur soit significative pour un observateur placé dans le référentiel K, il faut que celui-ci puisse accéder aux deux extrémités de cette

longueur, au même instant ( $t_1 = t_2$ ). Il faut donc imaginer deux événements ( $E_1$  et  $E_2$ ) simultanés pour l'observateur de  $K$ , aux extrémités de la longueur qu'il veut considérer. Le diagramme montre bien qu'une longueur ( $\Delta x'$ ) pour le référentiel  $K'$  devient ( $\Delta x$ ) pour le référentiel  $K$  et que ( $\Delta x$ ) est plus court que  $\Delta x'$ ). Ce phénomène est appelé *contraction des longueurs*.

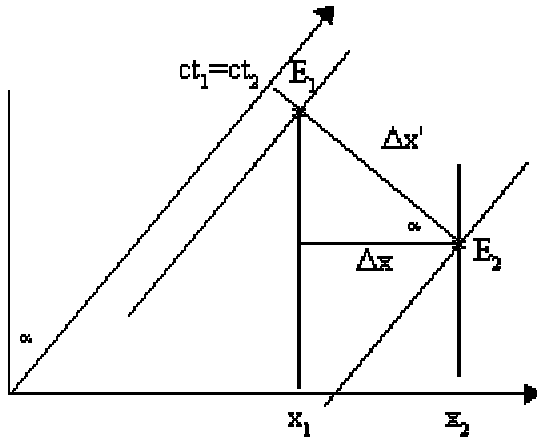


Fig. 10. Longueur au repos dans  $K'$ . Longueur contractée dans  $K$ .

Considérant la figure triangulaire du diagramme ci-dessus, on montre que :  $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \beta^2}$

Par contre, dans le diagramme de la Fig. 11, c'est pour le référentiel ( $K$ ) que la longueur ( $\Delta x$ ) est constante et au repos. C'est l'observateur du référentiel  $K'$  qui doit imaginer deux événements simultanés aux extrémités de cette longueur pour son référentiel  $K'$ .

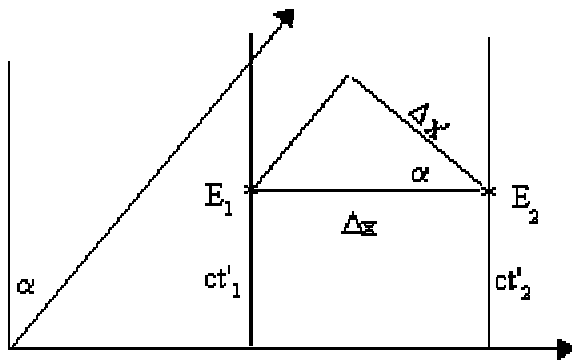


Fig. 11. Longueur au repos dans  $K$ . Longueur contractée dans  $K'$ .

Le diagramme montre maintenant que c'est ( $\Delta x'$ ) qui est plus court et on a :  $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2}$

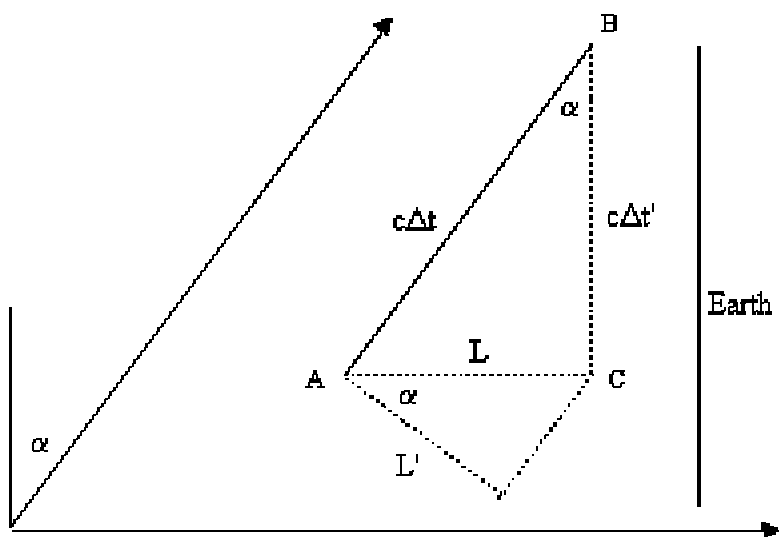
### G. Exemple d'application

Une particule s'approchant de la terre parcourt 900 m en 5  $\mu$ s. Quelle est la durée de ce trajet dans le référentiel de la particule? Quel est la longueur de ce trajet dans le référentiel de la particule?

La vitesse de la particule étant  $v = \frac{900\text{ m}}{5\ \mu\text{s}} = 180\text{ m}/\mu\text{s}$  et  $c = 300\text{ m}/\mu\text{s}$ , on aura  $\sin\alpha = 0,6$  et

$\cos\alpha = 0,8$ . La Fig. 12 nous montre un diagramme où l'axe du temps a été incliné d'un angle  $\alpha$  tel que  $\sin\alpha = 0,6$ . Le trajet de la particule est illustré par le segment de droite AB. Le diagramme montre bien que  $c\Delta t \cos\alpha = c\Delta t' \Rightarrow \Delta t' = 5\ \mu\text{s} * 0,8 = 4\ \mu\text{s}$ .

Pour que la longueur du trajet soit significative pour le référentiel de la particule, il faut imaginer deux événements simultanés dans le référentiel de la particule, A et C par exemple. Le diagramme montre bien  $L' = L \cos\alpha = 900\text{ m} * 0,8 = 720\text{ m}$



### IV. CONCLUSION

L'élément principal de cet article est certainement le diagramme de la Fig. 4. On y montre les deux projections sur les deux axes nécessaires à établir les coordonnées  $(x, ct)$  d'une part, et  $(x', ct')$  d'autre part. Ce diagramme de la relativité restreinte n'est qu'une simple modification au diagramme de la mécanique classique (Fig. 2) pour les coordonnées  $(x', ct')$ . La Fig. 5 montre

clairement que deux événements séparés d'une certaine distance ( $\Delta x$ ), simultanés pour un référentiel, ne peuvent l'être pour l'autre référentiel. Quant aux équations de la transformation de Lorentz, il suffit d'une ligne pour les démontrer à l'aide des triangles des Fig. 6 et 7. Il en est de même pour les phénomènes de la dilatation de l'intervalle de temps propre et de la contraction de longueurs. L'avantage principal de cette approche est certainement de réussir à faire comprendre les principaux éléments de la relativité restreinte en quelques heures seulement. Ajoutons que le diagramme peut être utilisé pour démontrer d'autres équations de la relativité : la transformation relativiste des vitesses<sup>2</sup>, l'effet Doppler relativiste, etc. J'espère finalement que ce texte permettra d'expliquer cette théorie à un plus grand nombre de personnes et d'y amener une réflexion critique quant à l'espace-temps dans lequel nous vivons.

## V. REMERCIEMENTS

Je remercie ma famille pour les encouragements à publier ce texte. Je remercie aussi mes collègues de travail pour la révision de ce texte et les nombreux conseils. Sans leur aide précieuse, ce texte ne serait jamais sorti de mes notes de cours. Je pense finalement à tous mes étudiants qui m'incitent constamment à trouver de nouvelles méthodes pour expliquer ce que nous, physiciens, comprenons de ce monde!

## VI. RÉFÉRENCES

BREHME, Robert W. (1962). « A Geometric Representation of Galilean and Lorentz Transformations », *American Journal of Physics*, n° 30, p. 489.

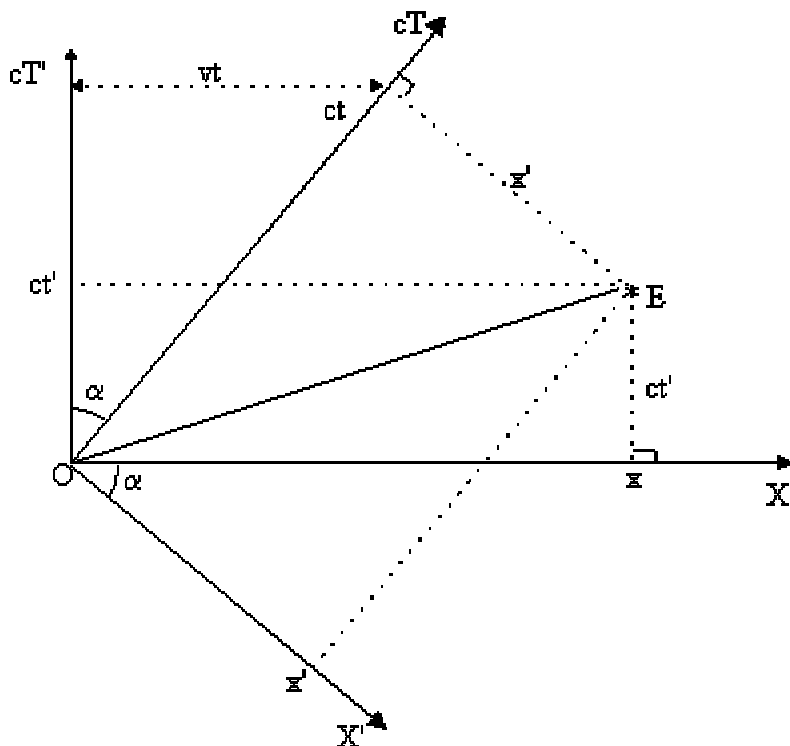
Site Internet : <http://www.colvir.net/prof/richard.beauchamp/relativi.htm>

---

<sup>2</sup> Pour plus d'information, veuillez consulter le site Internet : <http://www.colvir.net/prof/richard.beauchamp/relativi.htm>

## Annexe

Les coordonnées  $x'$  et  $ct'$  sont aussi des projections perpendiculaires aux axes  $X'$  et  $cT'$  telles qu'illustrées ci-dessous.



Les axes  $X'$  et  $cT'$  sont tournés du même angle  $\alpha$  par rapport aux axes  $X$  et  $cT$  respectivement, mais en sens opposé, c'est-à-dire que la rotation de l'axe  $X'$  par rapport à l'axe  $X$  est horaire tandis que la rotation de l'axe  $cT'$  par rapport à l'axe  $cT$  est anti-horaire. Dans la présentation de la relativité à l'aide de diagrammes, j'omets volontairement le tracé de ces axes  $X'$  et  $cT'$  pour simplifier le diagramme. À mon avis, cette omission n'enlève rien à la grande symétrie que l'on doit retrouver entre les référentiels  $K$  et  $K'$ .