DÉMARCHE DE MODÉLISATION EN MATHÉMATIQUES

Par **Philippe Etchecopar** et **Céline Saint-Pierre**

Activité pédagogique réalisée au Cégep de Rimouski

DÉMARCHE DE MODÉLISATION
EN MATHÉMATIQUES

Par **Philippe Etchecopar** et **Céline Saint-Pierre**

Cégep de Rimouski

Note : Lorsqu'il s'agit de termes qui renvoient à des personnes dont le sexe n'est pas défini ou qui renvoient aux deux sexes, le générique masculin est utilisé seul, sans aucune discrimination et dans le seul but d'alléger le texte.

ACTIVITÉ 7

DÉMARCHE DE MODÉLISATION EN MATHÉMATIQUES

*À très brève échéance l'enseignement des mathématiques (et d'autres matières scientifiques) va probablement subir de profonds bouleversements : on passera moins de temps sur les parties fastidieuses qu'on confiera à l'ordinateur, via le calcul formel (*Mathematica *ou* Maple*), pour se concentrer sur d'autres types de problèmes (choix de la modélisation, interprétation des résultats...).*

Norbert Verdier
Agrégé de mathématiques
Professeur à l'Université de Paris-Sud

Deux grandes notions derrière le bouleversement du monde des sciences par l'ordinateur : celle de modèle et celle de simulation.

Amy Dahan Dalmedico
Maître de Conférence à l'école Polytechnique de Paris

Informatique et mathématiques

Le développement accéléré de l'informatique, tant sur le plan des appareils que des logiciels, a transformé en profondeur le travail en sciences. Il permet également de transformer l'enseignement des sciences et plus particulièrement des mathématiques. Au niveau du programme de Sciences de la nature, nous sommes donc doublement interpellés. Nous devons d'abord préparer nos élèves à poursuivre des études en sciences au niveau universitaire où l'informatique devient omniprésente. Ensuite, nous devons utiliser les outils informatiques pour améliorer autant que possible l'enseignement des sciences.

Au cégep de Rimouski, depuis quelques années nous avons introduit l'usage des logiciels de calcul symbolique dans l'enseignement des mathématiques en Sciences de la nature. L'utilisation de ces logiciels, plus particulièrement *Maple* et *Mathematica*, nous a permis de développer auprès des élèves une démarche systématique de résolution de problème, la modélisation.

Cette démarche utilise les capacités graphiques et les capacités de calcul des logiciels de calcul symbolique pour atteindre un des objectifs importants des mathématiques au niveau collégial : mathématiser des situations concrètes. Cette démarche est une bonne préparation à des études, puis à un travail en sciences alors que l'usage des ordinateurs est de plus en plus associé à la *modélisation* et aux *simulations*. Elle correspond aussi à quelques-uns des objectifs du nouveau programme de Sciences de la nature.

La démarche de modélisation se traduit par une série d'activités que nous présenterons dans ce qui suit.

Activité réalisée au Cégep de Rimouski par Philippe Etchecopar et Céline Saint-Pierre, éditée par le Saut quantique.

Les objectifs pédagogiques

L'objectif principal de la démarche de modélisation est de permettre aux élèves d'acquérir une méthode rigoureuse de résolution de problèmes, la modélisation de phénomènes, correspondant à la démarche scientifique classique. Cette méthode doit leur permettre de ne plus percevoir les mathématiques comme un simple outil de calcul, mais comme le langage permettant de comprendre des phénomènes du monde qui nous entoure.

Cette méthode a aussi pour objectif de développer certaines habiletés comme celles d'observer et d'analyser, habiletés nécessaires pour dresser le modèle et pour effectuer des synthèses, pour communiquer et pour rédiger. Elle développe aussi l'habileté à travailler en équipe, le travail de modélisation se faisant en équipe selon des modalités graduelles tout au long des cinq cours. En terme d'attitude, le travail sur les modèles, les simulations et l'évaluation des limites du modèle, développe l'esprit critique. En terme de connaissances, l'élève est amené à maîtriser des logiciels qu'il utilisera à l'université, et il approfondit, par la visualisation, ses connaissances mathématiques.

La modélisation des phénomènes relevant d'autres disciplines (physique, biologie…) favorise le transfert des connaissances et l'autonomie dans le travail. La modélisation est une forme d'apprentissage par problèmes.

La démarche de modélisation est enseignée, puis utilisée dans l'ensemble des cours de mathématiques du programme de sciences de la nature, soit les cours NYA, NYB, NYC et FEG-05. Elle est de plus à la base de l'activité de synthèse de la filière Mathématiques-Physique. Cela suppose une certaine coordination entre les enseignantes et enseignants de mathématiques et aussi au sein du programme de sciences de la nature, comme nous le verrons plus loin.

La démarche de modélisation fait appel aux logiciels de calcul symbolique, ici *Maple*. Avant de voir comment la démarche de modélisation a été intégrée dans les cours de mathématiques, nous allons d'abord voir comment les logiciels de calcul symbolique ont été eux-mêmes intégrés dans les cours.

L'intégration des logiciels de calcul symbolique

Dans cette section nous allons présenter comment *Maple* a été introduit, puis est utilisé dans les cours NYA, NYB, NYC, FEG-05 et en Activité de synthèse. La démarche de modélisation suppose une maîtrise minimale de ce logiciel.

Objectifs

Les logiciels de calcul symbolique sont utilisés couramment à l'université et leur inclusion dans les cours de mathématiques de niveau collégial relève d'abord d'une bonne préparation aux études universitaires. Mais l'objectif principal au plan pédagogique est d'utiliser ces logiciels pour développer chez les élèves une méthode de travail qui leur permettra de traiter en profondeur une plus grande diversité de problèmes. Ces logiciels impliquent une méthode de travail rigoureuse d'abord au niveau de l'écriture : toute faute, même minime, est sanctionnée. De plus la séquence d'une série d'instructions nécessaires pour résoudre un problème doit respecter une certaine logique, ce qui développe une démarche de type « algorithmique ». Cela débouche sur la démarche de modélisation.

L’utilisation des logiciels de calcul symbolique permet aussi de développer une plus grande autonomie et un esprit plus critique chez l’élève. Par exemple, en rendant plus facile le tracé de graphiques, on peut demander à l’élève de porter davantage d’importance à son analyse : valeurs particulières, domaine, comportement à l’infini, unités, etc. Ces capacités graphiques permettent de visualiser les concepts rencontrés en cours et parfois présentés sous forme de démos. La capacité de calcul des ordinateurs permet aussi de recourir à la méthode des « essais-erreurs », de simuler, d’évaluer la plausibilité des réponses obtenues, etc.

Enfin, le nombre de postes au laboratoire étant insuffisant pour que chaque élève en ait un, les travaux de laboratoires se font en équipe de deux.

L’insertion dans les cours d’un logiciel de calcul symbolique

Les logiciels de calcul symbolique sont utilisés dans chacun des cours de mathématiques en Sciences de la nature. En NYA, il est prévu une période de travail en laboratoire chaque semaine. Le travail demandé, travail régulier ou problème de modélisation, demande une certaine préparation et environ une heure de travail personnel pour chaque période en laboratoire. Ce rythme se retrouve à peu près dans les autres cours, mais à un niveau un peu moins soutenu, les élèves étant devenus plus autonomes.

Structure d’un travail régulier en laboratoire

Dans les manuels utilisés, chaque chapitre se termine par une séquence « Traitement par ordinateur ». Cette séquence montre comment utiliser les logiciels de calcul symbolique pour mieux comprendre la matière vue dans ce chapitre et résoudre des problèmes. Pour atteindre les objectifs propres à l’introduction des logiciels de calcul symbolique, ces séquences « Traitement par ordinateur » ont toutes la même structure. Les principales commandes propres à la matière enseignée dans ce chapitre sont d’abord montrées et illustrées à l’aide de quelques exemples types. Ensuite les travaux et exercices demandés sont classés en quatre catégories.

Il y a d’abord les *Manipulations*. Il s’agit d’exercices permettant aux élèves d’acquérir une certaine maîtrise des commandes de base et leur permettant de résoudre des exercices simples.

Il y a ensuite les *Procédures*. Cela consiste à utiliser les logiciels de calcul symbolique pour résoudre un problème-type. Elles doivent être écrites de façon aussi générale et simple que possible sous une forme proche de celle de la programmation. L’élève est invité à conserver ces procédures, car ces procédures devraient être transférables dans plusieurs situations analogues.

La troisième catégorie est celle de *l’Exploration*. Il s’agit d’utiliser les capacités graphiques de l’ordinateur pour mieux « voir » et comprendre la matière enseignée. Il s’agit aussi, toujours grâce aux capacités graphiques, d’avoir une vision et une certaine compréhension de concepts qui ne peuvent être abordés en cours, mais qui en sont proches.

Il y a enfin les *Applications*. Les exercices relevant de cette catégorie sont en général des problèmes que l’on peut traiter par la démarche de modélisation.

Cette structure est identique pour les manuels de chacun des cours.

Les travaux réguliers en laboratoire

Nous ne traiterons ici que des travaux réguliers, les travaux de modélisation seront vus dans la section suivante. Dans le cours NYA, les élèves doivent effectuer environ huit travaux en laboratoire. Un travail consiste en une série d'exercices pris dans les catégories *Manipulations*, *Procédures* ou *Exploration* ou qui en sont très proches. Le travail se fait en équipe de deux et chaque membre de l'équipe a une tâche propre à effectuer, selon le document précisant le travail de chacun des deux membres. Le travail s'effectue en trois étapes.

Première étape : préparation du laboratoire

Environ une semaine avant le laboratoire, le professeur remet aux élèves une feuille précisant les objectifs du laboratoire, les principales pages à consulter dans *le Guide de Maple* et dans leur livre de cours et enfin le travail à faire au laboratoire. La présentation de ce laboratoire peut prendre une quinzaine de minutes en classe.

L'équipe doit d'abord, avant la séance de laboratoire, en dehors des heures de cours, rédiger les grandes lignes des solutions aux exercices demandés et indiquer les commandes qui seront nécessaires pour traiter ces solutions à l'ordinateur. Cette préparation, incluant un protocole de laboratoire, qui peut demander entre une demi-heure et une heure de travail, doit être présentée et acceptée par le professeur avant le laboratoire. Elle doit être annexée par la suite au rapport. Il s'agit de s'assurer que les élèves ont bien compris l'aspect mathématique des questions et qu'ils ont une stratégie de traitement, ce qui minimise les pertes de temps en laboratoire. Ils se rendent compte assez vite que mieux leur laboratoire est préparé, moins ils perdent de temps devant l'ordinateur et durant la période d'exécution de leur expérimentation.

Deuxième étape : travail en laboratoire

Ensuite, le travail en laboratoire consiste à effectuer à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique ce qui a été prévu dans la préparation et à s'ajuster selon les réponses obtenues.

Les élèves se regroupent en équipe de deux selon leur affinité et la composition des équipes doit être définitive après la troisième semaine du trimestre. Le travail d'équipe est réparti selon deux grands rôles : organisateur et secrétaire. Les principales tâches dévolues à chaque membre de l'équipe sont définies dans le guide du travail en équipe. Comme nous laissons la possibilité aux élèves d'échanger des tâches entre eux, nous leur demandons de remplir un contrat pour le travail d'équipe afin qu'ils nous indiquent quel est la part de responsabilité de chacun. Ce contrat et la préparation incluant le protocole de laboratoire signé, doivent être remis avec leur rapport de laboratoire.

En laboratoire, les élèves doivent être assez autonomes, car le professeur n'est qu'une personne-ressource pour les dépanner, mais il ne fait pas la solution ou l'expérimentation à leur place. Le travail en laboratoire doit exiger que les élèves fassent une réflexion sur la manière de résoudre leurs problèmes afin que la solution soit suffisamment générale pour être transférable à d'autres situations similaires ou qu'ils puisse faire des simulations sur certains paramètres d'un modèle.

Les difficultés sont alors des difficultés d'écriture et le travail du professeur est un travail de dépannage.

Troisième étape : rapport de laboratoire

Enfin, la troisième étape consiste à rédiger le rapport de laboratoire selon le format demandé. Il s'agit surtout de commenter les résultats et graphiques obtenus. Le rapport a la forme d'un document Word où sont inclus les fichiers *Maple* ou *Mathematica*.

Ces travaux sont corrigés selon un barème où sont prévus des aspects concernant le travail de chaque membre de l'équipe, le fonctionnement de l'équipe, la langue, le travail préparatoire et le rapport.

Le déroulement est identique dans les autres cours. Le nombre de travaux est moins élevé et n'a plus un rythme hebdomadaire.

Exemples

Ci-dessous un extrait de la séquence « Traitement par ordinateur » du premier chapitre du cours NYA. Cette séquence est disponible sous le nom *Exemple de laboratoire de calcul symbolique*.

6.2.5 La structuration des instructions

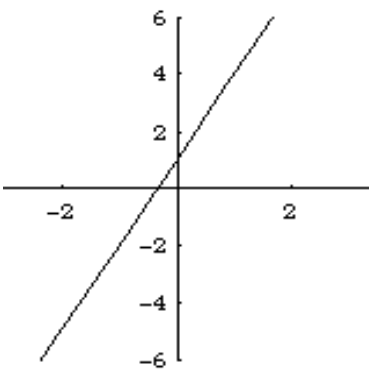
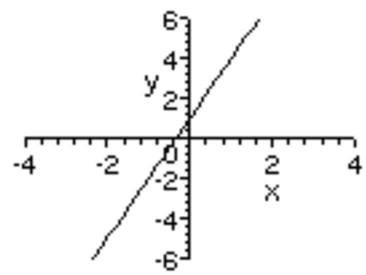
Quand on doit utiliser plusieurs instructions successives, il est nécessaire de respecter un certain ordre pour que le logiciel puisse bien les traiter.

1. Initialiser l'environnement. Il est conseillé de débuter par une commande qui efface tous les noms utilisés antérieurement pour éviter des confusions : **restart;** pour *Maple* et **Clear[nom des variables]** pour *Mathematica*;
2. Nommer et initialiser les variables. Vous entrez les données du problème, c'est-à-dire les valeurs des variables données en hypothèse, les fonctions, etc;
3. Définir les fonctions ou les « expressions » qu'il faut soi-même définir à partir des données;
4. Décrire le traitement de ce qui précède à l'aide des commandes du logiciel pour résoudre le problème.

Comme exemple, prenons la définition et la représentation de la fonction correspondant à la droite d'équation $y = f(x) = mx + b$ pour une valeur de l'ordonnée à l'origine b et différentes valeurs de la pente m.

Mathematica	*Maple*

`Clear[b,m,f,x]`
`"variables";`
`b=1`
`m=3`
`"fonction";`
`f[x_]:=m*x+b`
`"commande";`
`Plot[f[x],{x,-5,5},`
`    PlotRange->{-6,6}]`
	`restart;`
	`#Variables`
	`b:=1:`
	`m:=3:`
	`#Fonction`
	`f:=x->m*x+b;`
	`#Commande`
	`plot(f(x),x=-4..4,y=-6..6);`

Dans les deux cas :

- *m* et *b* sont des paramètres;
- *x* est une variable au sens mathématiques;
- *f* est une fonction;
- Vous remarquez qu'avec *Maple* si la ligne d'une commande se termine par « : », le résultat n'apparaît pas.

Il est important de bien faire la différence, au sens informatique, entre une *fonction*, comme nous venons de le voir, et une *expression*.

Consultez votre Guide, ou l'aide en ligne du logiciel, pour des explications plus détaillées sur les *variables*, les *fonctions* et les *expressions* au sens informatique.

Bilan

Dans l'ensemble, l'introduction des logiciels de calcul symbolique, *Maple* en NYA, NYB, NYC, FEG-05 et en Activité de synthèse et de *Mathematica* en FEG-05, a été très positive. Cela a contribué à développer chez les élèves une plus grande rigueur, à mettre davantage l'accent sur la compréhension et à leur fournir les moyens pour modéliser différents phénomènes. De plus, cela les a bien préparés pour les cours de sciences à l'université où les logiciels de calcul symbolique sont utilisés. Cela a aussi permis de voir un peu plus de matière. Le temps a été récupéré sur la partie auparavant consacrée aux « calculs marathons ». L'usage de ces logiciels permet de consacrer moins de temps à certains types de calculs et davantage à la compréhension.

La structuration des instructions, les exercices de type Procédure, permettent d'utiliser le langage de programmation de *Maple*.

L'expérience a également montré que l'élève devient autonome en laboratoire après trois ou quatre semaines. Ces trois ou quatre premières semaines sont importantes, car l'élève doit se familiariser avec l'interface, les commandes de base (les commandes de représentation graphique et de calcul répétitif), la structuration des instructions et la méthode propre à l'utilisation de ces logiciels.

Les difficultés éprouvées par les élèves portent surtout sur les erreurs d'écriture et les erreurs d'algorithme. Leur charge de travail est également un peu plus élevée qu'auparavant.

La démarche de modélisation

Les logiciels de calcul symbolique ne sont pas utilisés comme des « boîtes noires ». Ils servent, au contraire, au développement d'une méthode de résolution de problèmes, la modélisation.

Objectifs

L'objectif de la démarche de modélisation est de permettre aux élèves d'acquérir une démarche rigoureuse de résolution de problèmes en utilisant les capacités des logiciels de calcul symbolique. Cette démarche, proche de la méthode scientifique classique, amène les élèves à utiliser les mathématiques pour « structurer le processus de compréhension des phénomènes en cherchant à généraliser par-delà les séparations disciplinaires », comme l'écrit Ian Stewart dans *La nature et les nombres*. Il s'agit *d'observer* un phénomène pour en extraire les règles et les structures sous-jacentes et le traduire par un système d'équations et de fonctions, le *modèle*. Ce modèle doit rendre le phénomène prédictible et reproductible. Une fois le modèle établi, il s'agit, dans une étape *expérimentale*, de l'étudier et de le simuler à l'aide de logiciels de calcul symbolique et selon un protocole de laboratoire. Un rapport de laboratoire permet de commenter le phénomène à travers son modèle et d'en définir les limites.

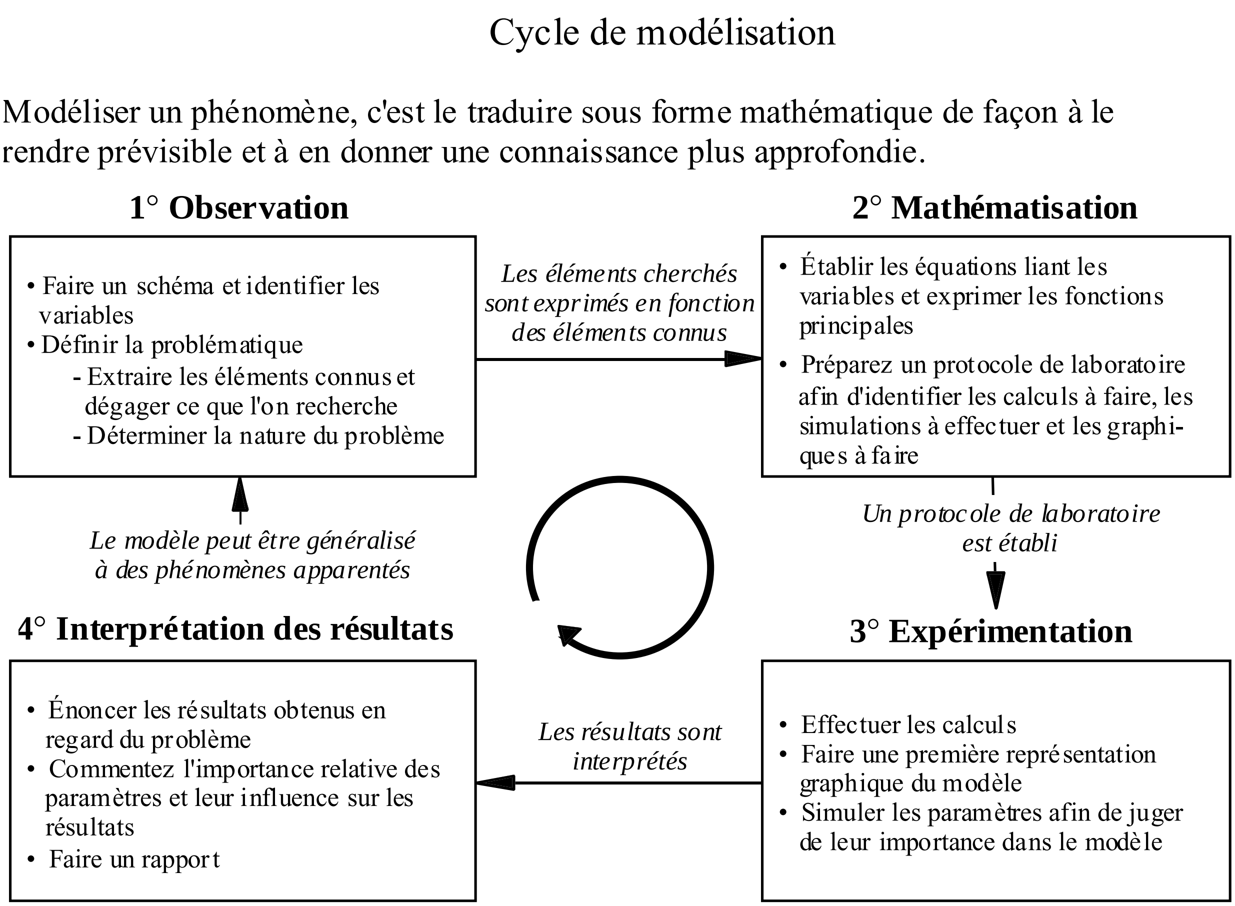
La méthode de modélisation doit permettre aux élèves de ne plus percevoir les mathématiques comme un simple outil de calcul, mais comme le langage permettant de traduire des phénomènes du monde qui nous entoure.

La démarche de modélisation rejoint certains des objectifs du nouveau programme de Sciences de la nature :

- Résoudre les problèmes de façon systématique ;
- Appliquer la démarche scientifique ;
- Raisonner avec rigueur ;
- Utiliser les technologies appropriées du traitement de l'information ;
- Développer les attitudes propres au travail scientifique ;
- Travailler en équipe ;
- Apprendre de façon autonome ;
- Traiter de situations nouvelles à partir de ses acquis ;

Description

La modélisation d’un phénomène se représente par le schéma ci-dessous :



Ces étapes de modélisation sont bien décrites et schématisées dans *Calculus a graphing approach,* de Finney, Thomas, Demana et Waits. Ce processus de modélisation découle des travaux du mathématicien George Polya, qui sont clairement présentés dans *L'univers mathématique* de Reuben et Hersh (page 275).

Ce schéma montre clairement que le travail de modélisation inclut quatre étapes bien définies. Chacune de ces étapes est traitée et évaluée comme un problème en soi. Il s’agit de bien montrer la différence entre un problème et un exercice. La résolution d’un exercice se fait rapidement et la solution peut être envisagée dès la lecture de l’énoncé. Dans le cas d’un problème, il est impossible d’anticiper la réponse à la seule lecture de l’énoncé et bien souvent résoudre un problème, ce n’est pas trouver une réponse précise, mais analyser les divers aspects du phénomène.

Il est particulièrement important d'habituer les élèves au fait que la résolution d'un problème se fait étape par étape et que la solution ne se limite pas à un calcul pour un cas particulier.

Précisons maintenant chacune des étapes de la modélisation.

Première étape : l'observation

La première étape est celle de l'observation. Un problème n'est pas un exercice consistant à choisir la bonne formule et à l'appliquer sans erreurs. Si un exercice, c'est souvent un calcul à effectuer, un problème, c'est surtout une situation à comprendre. En ce sens, la première étape, celle de l'observation, est cruciale. Si elle est trop sommaire, il sera très difficile ensuite de mettre en équation une situation que l'on ne connaît pas. L'observation commence évidemment par une lecture attentive de l'énoncé. Pour bien comprendre la situation qu'il décrit, il est souvent nécessaire de la représenter par un graphique ou de la décrire par un réseau de concepts. À partir de l'énoncé ou de la figure, il faut ensuite énumérer toutes les variables qui apparaissent et identifier les principales contraintes. Ces contraintes peuvent porter sur le domaine de certaines variables ou sur des liens existant entre elles. Il faut également indiquer les systèmes d'unités utilisés.

En réfléchissant sur l'énoncé, en observant la figure et les données, il s'agit d'identifier les lois physiques, les résultats mathématiques qui pourraient permettre de formuler une hypothèse sur la nature du problème. Cette hypothèse doit porter sur des lois ou sur des propriétés qui pourraient correspondre à l'énoncé. Dans le cadre du cours NYA, les problèmes peuvent relever soit de l'optimisation, soit des taux de variation liés, soit des mouvements. L'élève doit donc pouvoir rattacher l'énoncé à un de ces trois outils mathématiques développés dans ce cours.

Pour pouvoir énoncer une hypothèse sur laquelle reposeront les équations et les fonctions du modèle, il faut donc *observer* pour pouvoir *établir des liens* entre différentes connaissances acquises auparavant et l'énoncé du problème.

En résumé, les principaux éléments de cette première étape sont :

- Une lecture attentive de l'énoncé;
- Une schématisation et une représentation graphique de la situation décrite par l'énoncé;
- Une énumération des variables et des unités utilisées*;*
- Une énumération des contraintes portant sur ces variables*;*
- Une réflexion sur les connaissances acquises antérieurement, dans ce cours ou dans d'autres cours, qui pourraient être reliées à la situation décrite. Cette réflexion pourrait se traduire par un réseau de concepts*;*
- Une hypothèse sur les lois scientifiques (mathématiques, physiques, chimiques, etc.) semblant les plus appropriées et sur lesquelles le modèle sera bâti.

Seconde étape : la mathématisation

La seconde étape est celle de la mathématisation. Elle se déroule en deux temps.

Le premier temps consiste, à partir des observations et de l'hypothèse de la première étape, à décrire le phénomène à l'aide de fonctions et d'équations. Il faut d'abord reprendre les variables identifiées à la première étape et déterminer parmi elles la variable indépendante, la ou les variables dépendantes (dans le cas de plusieurs fonctions) et les simples paramètres. Il faut également vérifier que les unités sont homogènes. Pour obtenir les fonctions ou les équations, il faut reprendre les contraintes et surtout traduire l'hypothèse en équations. Cela consiste généralement à reprendre une ou plusieurs lois physiques et les mathématiser en utilisant les outils adéquats, dérivée première, dérivée seconde, dérivée d'une fonction composée, etc. En général, chacun de ces outils se traduit par une série d'équations bien définies. Par exemple, dans le cas d'un problème d'optimisation, il faut établir la dérivée première, les valeurs de la variable annulant cette dérivée première et le signe de la dérivée seconde pour ces valeurs. À ce niveau, il est préférable d'écrire tous les paramètres sous leur forme algébrique. Leur rôle apparaît plus clairement et cela facilitera le choix des paramètres selon lesquels on effectuera des simulations. Ce n'est qu'à l'étape de l'expérimentation que l'on remplacera les paramètres par des valeurs numériques. L'ensemble de fonctions et d'équations obtenues forme le *modèle* de la situation proposée par l'énoncé.

Dans un second temps, une fois les équations et fonctions du modèle bien identifiées, il est nécessaire de rédiger un *protocole de laboratoire*. À partir de ce que l'on veut savoir sur le phénomène présenté, il s'agit, en examinant le modèle, de déterminer les calculs numériques et algébriques à effectuer, les fonctions à représenter, et dans quel domaine, et les simulations à effectuer sur certains paramètres. Chacun de ces éléments doit répondre à une attente précise que l'on explique dans le protocole de laboratoire.

Pour certains problèmes il faut prévoir un protocole en laboratoire de sciences (physique, chimie, etc.) pour valider les résultats obtenus. En effet, les résultats obtenus à partir du modèle mathématique doivent être confrontés avec la réalité pour qu'ils soient validés.

Le protocole de laboratoire doit être signé par le professeur.

En résumé, les principaux éléments de cette seconde étape sont :

- Reprendre les schémas et les variables obtenus lors de l'étape précédente*;*
- Identifier les variables indépendantes, dépendantes et les paramètres*;*
- Recenser les différentes équations traduisant l'hypothèse et les adapter à l'aide des outils mathématiques adéquats;
- Mettre en équations les contraintes ou les valeurs données;
- Suite à l'objectif proposé par l'énoncé, rédiger un protocole de laboratoire prévoyant les calculs, les graphiques et les simulations nécessaires à l'atteinte de cet objectif;

Activité réalisée au Cégep de Rimouski par Philippe Etchecopar et Céline Saint-Pierre, éditée par le Saut quantique.

Troisième étape : l'expérimentation

La troisième étape est celle de l'expérimentation en laboratoire informatique. Elle consiste essentiellement à réaliser à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique ce qui a été prévu dans le protocole de laboratoire. Les résultats obtenus doivent être brièvement commentés et il est toujours nécessaire d'évaluer s'ils sont plausibles par rapport à l'énoncé du problème. S'ils ne sont pas plausibles, il faut alors revoir le modèle ou même revenir sur l'hypothèse énoncée à la fin de la première étape. Il arrive parfois que certains résultats obtenus, ou que l'observation de certains graphiques, suggèrent des calculs ou des graphiques ou des simulations qui n'étaient pas prévues dans le protocole de laboratoire initial.

Il faut également, si cela a été prévu, valider le modèle en laboratoire de sciences.

En résumé, les principaux éléments de cette troisième étape sont :

- Effectuer les manipulations prévues dans le protocole de laboratoire*;*
- Évaluer la plausibilité de chacun des résultats et les commenter brièvement*;*
- Effectuer, si nécessaire, des manipulations supplémentaires suggérées par les résultats obtenus;
- Rédiger un rapport de laboratoire.

Quatrième étape : l'interprétation des résultats

La quatrième étape est celle de la synthèse et de l'interprétation des résultats. Elle peut s'effectuer en deux parties.

Il y a d'abord la synthèse proprement dite. Elle consiste à résumer les points les plus importants qui se dégagent de l'étude du modèle : la plupart du temps il s'agit d'étudier les solutions au problème figurant dans l'énoncé. La synthèse peut indiquer le nombre de solutions, leurs conditions d'existence, leur comportement dans des cas particuliers, etc. Il faut en évaluer la plausibilité et respecter un système d'unité cohérent.

Il y a ensuite une analyse plus globale du modèle : dans quelle mesure le modèle semble-t-il fidèle au phénomène? Quels aspects ont été négligés? Dans quelle mesure les lois retenues comme hypothèse, reflétaient-elles la situation? D'autres lois intervenaient-elles?

La conclusion doit porter sur une évaluation globale des résultats obtenus, en indiquer les limites et proposer des améliorations au modèle.

Normalement, cette synthèse fait l'objet d'un rapport final.

En résumé, les principaux éléments de cette quatrième étape sont :

- Effectuer une synthèse des résultats obtenus en laboratoire*;*
- Évaluer le degré d'approximation entre le modèle et la situation qu'il représente*;*
- Évaluer ce qui pourrait être fait pour que le modèle représente plus fidèlement le phénomène;
- Rédiger le rapport final en y incluant le rapport de laboratoire*;*

Insertion dans les cours de la démarche de modélisation

Les élèves sont initiés à la méthode de modélisation dans le cadre du cours NYA, dès qu'ils ont les éléments nécessaires pour étudier des phénomènes d'optimisation et dès qu'ils ont une maîtrise suffisante des logiciels de calcul symbolique. En NYA, les problèmes peuvent relever de l'optimisation, des taux de variation liés et du mouvement (rectiligne, circulaire, harmonique et dans le plan). L'élève doit dans son hypothèse identifier à laquelle de ces situations relève l'énoncé du problème proposé. Une fois la situation identifiée, il doit savoir de quelles équations est constitué le modèle général.

L'énoncé des problèmes posés indique bien que ce qui est attendu n'est pas une réponse précise, mais un modèle général qu'il faut étudier. Ensuite des valeurs numériques peuvent être proposées pour étudier un cas particulier.

Voici un exemple d'énoncé de problème en NYA :

- Sur une rivière, une barque est située à d km de la rive. Les passagers de la barque désirent rejoindre une maison située à L km en aval. La vitesse de la barque est de V_B km/h tandis que la vitesse de déplacement à pied est deV_P km/h. Dans un cas particulier $l = 1$ km, $L = 5$ km, $V_B = 2$ km/h et $V_P = 4$ km :

  a) Déterminez le modèle mathématique permettant de définir le point de la rive où la barque doit aborder pour que la durée du trajet à la maison soit la plus courte possible. Ce modèle doit inclure un protocole de laboratoire prévoyant les calculs à effectuer, les fonctions à représenter et un paramètre de votre choix à simuler.

  b) Effectuez le protocole de laboratoire, validez le modèle dans le cadre du cas particulier et commentez. Rédigez un rapport.

Dans les cours NYB, et NYC, les problèmes sont posés de la même façon. Dans le cours FEG-05, l'ancien Calcul 3 ou 201-303, un problème est posé de la façon suivante :

- Supposons que l'on met un corps soluble dans un liquide, ce corps se dissout à un taux proportionnel au produit de la quantité non encore dissoute par la différence entre la concentration correspondant à la saturation et celle correspondant à l'instant présent.

  Sur la base de cette hypothèse, dressez le modèle de l'évolution au cours du temps de la dissolution dans un liquide de volume V d'une masse M_O d'un corps soluble dans ce liquide. C_S sera la concentration correspondant à la saturation.

  Proposez et réalisez un protocole de laboratoire pour l'étudier.

  Commentez les résultats et indiquez les limites de ce modèle.

En Activité de synthèse, les problèmes sont posés de façon très générale et les élèves doivent effectuer une réelle recherche pour déterminer sur quoi ils établiront leur hypothèse. Un problème sera alors posé sous la forme suivante :

La compagnie de transport « Les Gros Cubes » a obtenu un important contrat de la compagnie forestière « La Pitoune ». Il y a pour 5 000 tonnes de billots d'épinette à sortir du bois. Le problème, c'est que la coupe a été effectuée loin au sud du petit village de Trinibad Del Montés. Pour atteindre les billots, il faut utiliser un chemin forestier de près de 200 km à peine carrossable.

Il y a même un passage de près de 60 km surnommé « enfer et cimetière », tellement les bas côtés sont jonchés de suspensions qui ont trouvé là une mort précoce et violente.

C'est que la compagnie forestière, par souci d'économie, sachant que ce n'est pas elle qui sortirait le bois, n'a pas aplani le chemin forestier comme elle aurait dû. Sur la section « enfer et cimetière » la route ressemble a une montagne russe dont les crêtes se succèdent à des distances régulières de 15 à 20 m.

Le boss de « Les Gros Cubes » lui aussi par souci d'économie, voudrait que ses camions puissent rouler à 50 km/h ou 60 km/h, car la route est droite et il voudrait que ses camions puissent faire le plus d'aller-retour par jour, chaque camion pouvant prendre 25 tonnes de billots.

Comme on dit à Trinibad Del Montès, « quand la bière est décapsulée, il faut la boire et quand le bois est coupé, il faut le sortir ».

Le boss demande donc à son ingénieur en chef d'ajuster en conséquence la suspension de ses remorques.
Comme l'ingénieur en chef avait prévu un voyage de pêche, il fait venir deux étudiantes et un étudiant en génie qui faisaient un stage chez « Les Gros Cubes » et il leur passe sa commande :

« Lundi matin fournissez-moi un rapport. Je veux qu'il fasse le tour du problème posé par « enfer et cimetière » et présentez des recommandations pour qu'une remorque chargée de 25 tonnes puisse rouler sans dommage sur « enfer et cimetière » à environ 50 km/h ou 60 km/h de façon à faire deux allers-retours par jour. Si ça prend une suspension spéciale pour le camion, donnez les caractéristiques du ressort équivalent à cette suspension pour que l'on puisse passer la commande dès mardi ».

Sur ce, l'ingénieur en chef est parti à la pêche et les trois jeunes stagiaires à la job.

Faites leur rapport.

Déroulement d’une activité de modélisation

Les problèmes de modélisation sont introduits en NYA, dès que les élèves ont une bonne connaissance de la dérivée. Ce sont surtout des problèmes d’optimisation ou de taux de variations liés. Ensuite ce sont des problèmes de variation ou de mouvement (rectiligne, circulaire, harmonique et dans le plan). En NYB ce sont des problèmes qui se traitent par les équations différentielles ou des sommes de Riemann. En FEG-05, ou Calcul 3, ce sont des problèmes se traitant aussi par les équations différentielles ou par l’optimisation de fonctions à plusieurs variables avec des contraintes.

Les problèmes de modélisation se font à deux niveaux : sans l’utilisation de l’ordinateur ou avec l’utilisation de l’ordinateur.

Les problèmes pour lesquels on ne demande pas l'utilisation de l'ordinateur sont plus rapides à résoudre puisqu'ils n'incluent pas de traitement en laboratoire. Leur objectif est de familiariser les élèves avec la démarche et le découpage d'un problème en plusieurs étapes.

Les problèmes pour lesquels on demande un traitement avec un logiciel de calcul symbolique sont plus longs : ils font l'objet de « travaux longs » ou de travail de synthèse à la fin d'un cours.

Préparation

L'énoncé du problème est remis au moins une semaine avant la période prévue de traitement en laboratoire. L'énoncé du problème fait une référence assez claire de la nature de l'hypothèse et des outils mathématiques à utiliser. Durant cette semaine les équipes doivent traiter les deux premières étapes, soit l'observation et la mathématisation. Avant la période prévue en laboratoire, les équipes doivent présenter au professeur et lui faire signer le protocole de laboratoire. Dans ce protocole, une importance particulière est apportée au choix des graphiques, aux unités et aux raisons justifiant le choix des paramètres à simuler. Durant dette période, la tâche du professeur relève du tutorat. En FEG-05 et surtout en Activité de synthèse où l'étape d'observation demande une recherche documentaire, les équipes doivent aussi faire approuver l'hypothèse sur laquelle ils vont baser la mathématisation.

Les modalités du travail en équipe sont les mêmes que celles prévues pour les différents travaux en laboratoire. Ces modalités sont un peu différentes en Activité de synthèse où les équipes sont composées de trois personnes.

Déroulement du laboratoire

La période en laboratoire consiste à appliquer le protocole de laboratoire. Là aussi, le rôle du professeur est celui d'un tuteur. En FEG-05 et surtout en Activité de synthèse, les élèves doivent pouvoir intégrer des calculs, des graphiques ou des simulations non prévues dans le protocole initial, mais qui découlent des premiers résultats obtenus.

Rapport

Le rapport de la modélisation d'un phénomène est structuré selon les quatre étapes du schéma de modélisation. L'étape 3 inclut le rapport de laboratoire présenté sous la forme d'un fichier *Maple* où les réponses obtenues sont commentées. La quatrième étape consiste en une synthèse et une brève analyse des limites du modèle. En FEG-05 et surtout en activité de synthèse, il faut ajouter une bibliographie et en annexe les résultats les plus pertinents de la recherche documentaire.

Exemples

Dans le cours NYA, au chapitre 5 du manuel, quatre exemples d'élaboration de modèles sont proposés aux élèves. Deux ont trait à l'optimisation et deux aux taux de variation liés. Dans chacun des deux cas, un exemple utilise un logiciel de calcul symbolique et l'autre se traite de façon traditionnelle. Ces quatre exemples sont présentés dans le document *Exemples de démarches de modélisation*. Nous reproduisons ci-dessous le quatrième exemple :

Exemple 4 (avec *Maple* ou *Mathematica*)

Considérons un réservoir cylindrique en métal de volume V m^3, de hauteur de h m et dont le cercle de base a un rayon de r m. Le réservoir est muni d'un couvercle de métal.

1. *Déterminez le modèle mathématique permettant de définir les dimensions du réservoir pour que sa surface métallique totale soit minimale pour une valeur donnée du volume V;*
2. *Si V=5 m^3, définissez les dimensions du réservoir correspondant à une surface minimale;*
3. *Simulez le modèle selon un paramètre de votre choix. Commentez les résultats obtenus.*

Solution

1. Observation

a) Variables et schéma

Variables

h : hauteur du réservoir;

r : rayon de la surface de base;

S : surface totale du réservoir;

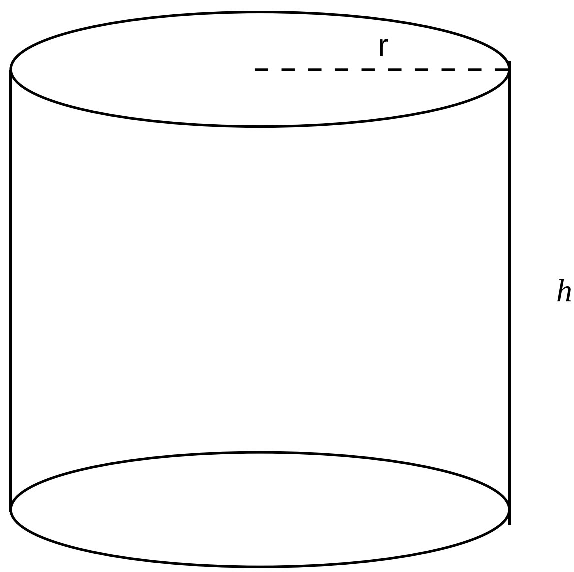
Paramètre

V : volume du réservoir;

Contraintes

$V = \pi h r^2$;

Schéma



Activité réalisée au Cégep de Rimouski par Philippe Etchecopar et Céline Saint-Pierre, éditée par le Saut quantique.

b) Problématique

1. *La quantité connue est* $V = 5\ \ m^3$.
   La quantité recherchée est la surface minimale S *du réservoir, côté, fond et couvercle;*

2. *La question porte sur la recherche d'un minimum. Il s'agit d'un problème d'optimisation.*

2. Mathématisation du problème

a) Équations représentant le problème

La surface totale du réservoir est celle de la paroi verticale ajoutée à celles du fond et du couvercle. La surface de la paroi verticale est celle d'un rectangle de largeur h et de longueur $2\pi r$.

La surface totale est donc :

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (1)$$

La fonction définissant la surface dépend de deux variables et ne peut être immédiatement utilisée pour répondre à la question. En effet, les deux variables sont ici liées, car le volume V est donné. Nous avons donc :

$$V = \pi r^2 h \qquad (2)$$

De cette équation, nous pouvons extraire la hauteur en fonction du rayon :

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad (3)$$

L'équation (1) donnant la surface totale devient donc, en remplaçant h par cette valeur :

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$$

Soit :

$$S = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r} \qquad (4)$$

La surface sera minimale lorsque sa dérivée première sera nulle (extremum) et sa dérivée seconde positive (minimum). Soit :

$$\frac{dS}{dr} = 0 \ \text{ et } \ \frac{d^2S}{dr^2} > 0 \qquad (5)$$

Les équations (4) et (5) forment le modèle mathématique de la situation proposée.

Activité réalisée au Cégep de Rimouski par Philippe Etchecopar et Céline Saint-Pierre, éditée par le Saut quantique.

b) Protocole de laboratoire

Calculs

La fonction à optimiser étant la surface S définie par $S = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$, nous devrons choisir r comme variable indépendante, puisque la valeur du volume V est donnée.

Comme il s'agit d'un problème d'optimisation, nous devrons effectuer les calculs suivants :

1. Calcul de la dérivée $\frac{dS}{dr}$;
2. Résolution de l'équation $\frac{dS}{dr} = 0$
3. Détermination du signe de $\frac{d^2S}{dr^2}$ pour les racines de l'équation précédente.

Graphique

La fonction est la surface S et la variable indépendante est le rayon r. Nous représenterons donc le graphique de la fonction $S(r)$.

Simulations

Le rayon r étant la variable indépendante, le seul paramètre est le volume V. Nous effectuerons des simulations pour évaluer l'impact de V sur la surface $S(r)$. Pour cela, nous représenterons une famille de courbes correspondant à différentes valeurs de V.

3. Expérimentation

Cette section représente le rapport de laboratoire basé sur le protocole de la section précédente.

a) Calculs

Nous devons :

1. Calculer la dérivée $\frac{dS}{dr}$;
2. Résoudre l'équation $\frac{dS}{dr} = 0$ et obtenir la valeur du rayon correspondant à la surface minimale;
3. Déterminer le signe de la dérivée seconde;
4. Déterminer la hauteur du réservoir.

Activité réalisée au Cégep de Rimouski par Philippe Etchecopar et Céline Saint-Pierre, éditée par le Saut quantique.

Nous devons entrer les instructions ci-dessous :

Clear[r]
"Variables données"
V=5;
"Surface"
S[r_]:=2*Pi*r^2+2*V/r
"Dérivée"
der1=S'[r]
"Extremums"
ext=NSolve[der1==0,r]
"Concavité"
der2=D[der1,r]
der2/.r->ext[[3,1,2]]
"Valeur de la surface"
S[ext[[3,1,2]]]
N[%]
	restart;
	"Variables données";
	V:=5;
	#Fonction à optimiser
	"Surface";
	S:=r->2*Pi*r^2+2*V/r;
	#Recherche des extremums
	"Dérivée";
	Sp:=D(S);
	"Extremums";
	ext:=fsolve(Sp(r)=0,r);
	"Concavité";
	Ss:=D(Sp);
	Ss(ext);
	"Valeur de la surface";
	evalf(S(ext));

Avec *Maple*, nous obtenons :

"Variables données"

$$V := 5$$

"Surface"

$$S := r \rightarrow 2\,\pi\,r^2 + 2\,\frac{V}{r}$$

"Dérivée"

$$Sp := r \rightarrow 4\,\pi\,r - 2\,\frac{V}{r^2}$$

"Extremums"

$$ext := .9266805448$$

"Concavité"

$$Ss := r \rightarrow 4\,\pi + 4\,\frac{V}{r^3}$$

$$4\,\pi + 25.13274123$$

"Valeur de la surface"

$$16.18680794$$

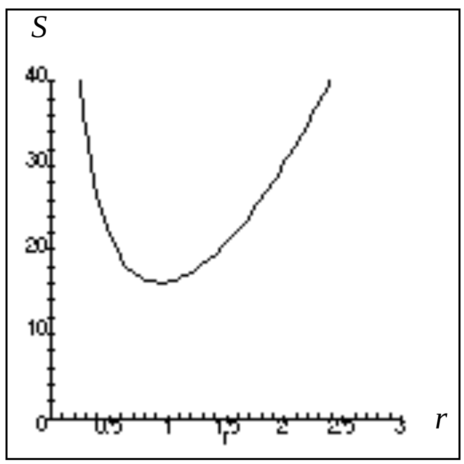
Sp et S_S sont respectivement les dérivées première et seconde de la fonction *S(r)*.

b) Graphique

Pour représenter la variation de la fonction $S(r)$ selon la variable indépendante r, nous allons entrer les instructions ci-dessous :

`Clear[r]`
`"Variables données"`
`V=5;`
`"Surface"`
`S[r_]:=2*Pi*r^2+2*V/r`
`"Graphique"`
`Plot[S[r],{r,0,3},`
`    PlotRange->{0,40}]`
	`restart;`
	`"Variables données";`
	`V:=5;`
	`"Surface";`
	`S:=r->2*Pi*r^2+2*V/r;`
	`"Graphique";`
	`plot(S(r),r=0..3,S=0..40);`

Avec *Maple*, nous obtenons :



c) Simulations

Simulations de la surface du réservoir selon son volume

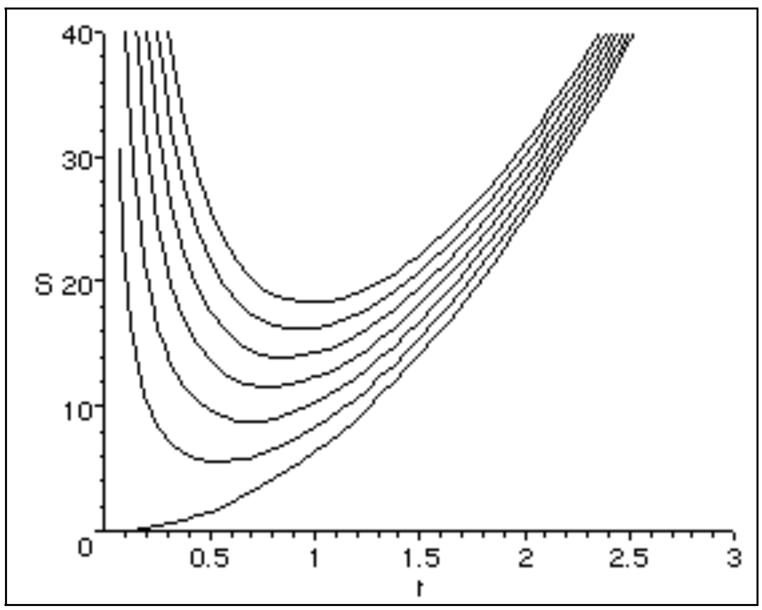
Pour évaluer l'impact du volume sur la surface du réservoir, nous allons représenter sur une même figure les graphiques de la fonction $S(r)$ pour différentes valeurs du volume.

Activité réalisée au Cégep de Rimouski par Philippe Etchecopar et Céline Saint-Pierre, éditée par le Saut quantique.

Entrons les instructions ci-dessous :

Clear[r] "Surface" S[r_]:=2*Pi*r^2+2*V/r "Liste de fonctions" liste=Table[S[r], {V,0,6}] "Graphiques" Plot[Evaluate[liste], {r,0,3},PlotRange->{0,40}]	restart; "Surface"; S:=r->2*Pi*r^2+2*V/r; "Liste des fonctions"; liste:=[seq(S(r), V=0..6)]; "Graphiques"; plot(liste,r=0..3, S=0..40,color=black);

Avec *Maple*, nous obtenons la famille de courbes suivante :



4. Interprétation des résultats

La surface est minimale lorsque le rayon vaut 0,927 m et la hauteur 1,853 m. La surface vaut alors 16,187 m^2.

Le graphique confirme ces valeurs et montre que pour un volume de 5 m^3 la surface grandit très vite lorsque le rayon tend vers 0 (le réservoir devient un tube effilé) et un peu moins vite lorsqu'il augmente (le réservoir devient un disque très large).

Les simulations montrent que lorsque le volume varie, les dimensions changent, mais que la tendance reste la même, surtout lorsque le rayon augmente.

Le contexte pédagogique

Le développement de la méthode de modélisation s'est fait dans le cadre d'une expérimentation de renouvellement de l'enseignement des sciences qui s'est déroulée au cégep de Rimouski depuis 1993. Cette expérience s'est faite autour de trois fils conducteurs : l'introduction des TIC, le développement d'une démarche systématique de résolution de problème et le développement d'une culture scientifique chez les élèves. Cette expérimentation est basée sur une collaboration entre les disciplines de sciences et elle a été coordonnée depuis 1994 par un Comité programme regroupant les quatre disciplines de sciences, informatique et les disciplines de formation générale.

Approche multidisciplinaire

L'expérimentation a privilégié une approche multidisciplinaire tant au plan des contenus que des méthodes.

Au plan des contenus, il y a eu une certaine harmonisation entre la façon de présenter des concepts que l'on retrouvait dans plus d'une discipline. En mathématiques, cela a conduit, par exemple, à accorder une certaine importance à l'étude des mouvements en NYA ou celle de la croissance démographique en NYA et NYB. Il y a eu aussi une coordination assez étroite au niveau du développement d'une culture scientifique.

Au plan des méthodes, la collaboration a été très étroite. Les méthodes de résolution de problèmes que l'on retrouve dans les activités-synthèse des deux filières, en chimie-biologie (l'Approche par problèmes) et en mathématique-physique (la modélisation), sont très proches. Le travail d'équipe est défini par les mêmes règles. Les activités synthèses dans les deux filières ont les mêmes objectifs et les mêmes modalités.

Dans la filière mathématique-physique, l'Activité de synthèse se situe dans le cadre d'un cours, basé sur le même plan de cours, qu'il soit donné par le département de mathématique ou par celui de physique. Les groupes sont répartis également entre les deux départements. Cela implique une bonne collaboration entre les professeurs de ces deux départements qui donnent ce cours. Cette collaboration n'est pas aussi étroite dans les autres cours.

Intégration de la démarche de modélisation en mathématiques

Le département de Mathématiques a décidé que les cours de mathématiques en Sciences de la nature correspondraient aux orientations du programme de Sciences de la nature : utilisation de logiciels de calcul symbolique, *Maple*, dans l'ensemble des cours (NYA, NYB, NYC, FEG-05 et Activité de synthèse), développement d'une méthode de résolution de problème (modélisation et travail d'équipe) et développement d'une culture scientifique. Cela implique le même plan de cours pour un cours donné et une bonne collaboration entre les professeurs.

À Rimouski, le cours NYA se donne en première session, NYB en seconde, NYC en troisième et les cours FEG-05 et l'activité de synthèse en quatrième session.

Organisation matérielle

À Rimouski, en Sciences de la nature, il y a environ 150 élèves en première année et 130 en seconde. Les groupes comportent entre 30 et 35 élèves. Deux laboratoires de 18 postes chacun sont « dédiés » au programme de Sciences de la nature, mais sont aussi utilisés par d'autres programmes. Normalement, l'occupation des laboratoires ne peut dépasser 37h par semaine pour que les élèves puissent y avoir accès pour leurs travaux personnels. Cela implique qu'au laboratoire, il y a deux élèves par poste.

Les laboratoires comptent pour 5% de la note finale et le travail synthèse, également pour 5%.

Conditions minimales pour le développement de la méthode de modélisation

Idéalement, une bonne collaboration entre les disciplines, surtout entre mathématiques et physique, et aussi entre les professeurs de mathématiques est souhaitable. Cela permet de développer progressivement la méthode et cela donne un effet de renforcement. Mais une collaboration aussi étroite, si elle est souhaitable, n'est pas une condition sine qua non.

Si, pour diverses raisons, il n'y a pas d'harmonisation entre les différents cours de mathématiques et s'il n'y a pas d'accord pour utiliser l'informatique dans l'ensemble des cours de math de Sciences de la nature, il est quand même possible que la méthode ne soit utilisée que dans certains cours. L'initiation pourrait se limiter au cours initial NYA ou n'être utilisée que dans le cours terminal FEG-05. Après tout, une maîtrise, même partielle, de l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique ou de la démarche de modélisation, est plus intéressante pour un élève qui va en sciences, qu'une ignorance complète.

En terme de laboratoire, la méthode pourrait être utilisée avec des ressources moindres : en NYA une maîtrise minimale de la méthode pourrait s'acquérir sans qu'il y ait une séance de laboratoire par semaine : le rythme pourrait être de deux laboratoires séances par mois.

Matériel pédagogique

L'équipe des enseignants a été amenée à développer un certain matériel pédagogique pour les cours de mathématiques.

Cours NYA

- *Guide Maple*, Presses pédagogiques de l'Est : ce guide est utile dans l'ensemble des cours ;
- Instructions pour le travail d'équipe ;
- Gabarits pour les rapports de labs ;
- Manuel *Calcul différentiel et résolution de problèmes* avec *Mathématica* et *Maple*, de Philippe Etchecopar, Griffon d'argile et Presses pédagogiques de l'Est :
  - **Annexe A.1 :** La méthode de résolution de problèmes et l'initiation à la modélisation (extrait du chapitre 5).
  - **Annexe A.2 :** Exemple de laboratoire (extrait du chapitre 5).

Cours NYB

- Cahier de laboratoire;
- *Notes de cours,* Presses pédagogiques de l'Est (manuel disponible en septembre 2001) ;

Cours NYC

- Cahier de laboratoire;
- *Notes de cours,* Presses pédagogiques de l'Est (manuel en rédaction) ;

Cours FEG-05

- *Guide Mathematica*, Presses pédagogiques de l'Est ;
- Manuel *Calcul 3 par la résolution de problèmes*, Presses pédagogiques de l'Est ;

Activité de synthèse

- *Guide méthodologique.* Presses pédagogiques de l'Est.

Un bilan provisoire

L'introduction des logiciels de calcul symbolique et le développement d'une méthode de résolution de problèmes se sont avérés très positives. Une fois à l'université, nos finissantes et nos finissants ont pu apprécier les avantages que leur procuraient une bonne maîtrise de *Maple* et de *Mathematica* et une méthode systématique de traiter des problèmes. Ces avantages étaient déjà évidents au niveau de l'activité de synthèse.

La démarche de modélisation contribue à surmonter quelques unes des difficultés qu'éprouvent les élèves pour résoudre des problèmes.

Définir des étapes pour résoudre un problème

Les élèves, habitués à effectuer des exercices, ont de la difficulté, devant un problème, à penser à le subdiviser ou à définir des étapes. La démarche de modélisation les habitue à ne pas penser obtenir immédiatement la réponse et à utiliser les étapes classiques de la méthode scientifique.

Le syndrome de la feuille blanche

Devant un problème, une difficulté des élèves, c'est de déterminer « par où commencer ». La méthode leur propose une première étape d'observation assez simple : faire un schéma, recenser les variables, recenser les contraintes, etc. Une fois que l'élève a mis toutes ces données sur papier, il peut commencer à réfléchir sur l'hypothèse en considérant toutes ces données plutôt qu'une feuille blanche.

Déterminer l'essence d'un problème avant d'effectuer les calculs

Un problème posé de façon classique demande généralement une solution numérique précise. L'élève a alors tendance, comme pour un exercice, à rechercher tout de suite la réponse particulière sans chercher réellement à comprendre le cas général. Or, en mathématiques, c'est le cas général qui est important. La démarche de modélisation oblige systématiquement l'élève à trouver le cas général d'abord, c'est-à-dire le modèle. À travers des contextes apparemment différents, l'élève est habitué à reconnaître une situation-type, l'hypothèse, et à associer un système précis d'équation à chacune de ces situations-types : problème d'optimisation, de taux de variation liés, de mouvement uniforme, etc.

Développer une attitude « active »

La résolution classique d'un problème se limite la plupart du temps à une réponse précise. La démarche de modélisation demande, en général, d'explorer les différentes solutions. Cela oblige l'élève à être « actif ». Il doit faire preuve de créativité et surtout d'esprit critique quand il faut choisir les paramètres à simuler, évaluer les réponses, définir les limites du modèle, etc.

Généralisation de la méthode

À première vue, la démarche de modélisation peut sembler longue, ce qui est en partie le cas quand elle implique l'utilisation de logiciels de calcul symbolique. En fait, les élèves ont aussi à utiliser cette démarche pour des problèmes où le recours à l'ordinateur n'est pas demandé. Les étapes sont alors beaucoup plus brèves et les élèves en acquièrent une bonne maîtrise.

Les résultats obtenus par la démarche de modélisation sont donc encourageants. Mais c'est plutôt le travail qui reste à faire que nous voulons souligner.

Il serait d'abord souhaitable d'améliorer l'éventail et la qualité des problèmes proposés. Pour cela il faudrait des échanges plus soutenus entre les diverses disciplines, entre le cégep et l'université, entre les différents cégeps et aussi entre les cégeps et le milieu scientifique.

Il serait intéressant d'évaluer ce qui pourrait être utilisé des outils informatiques qui se multiplient et surtout du réseau Internet. Il faudrait aussi évaluer ce qui pourrait être utilisé des logiciels de calcul symbolique et de leurs incessantes mises à jour. De plus, l'utilisation du langage de programmation de *Maple* pourrait être une bonne préparation pour ceux et celles qui poursuivront leurs études en sciences pures. Parallèlement à l'utilisation de la programmation, il serait intéressant d'habituer les élèves à travailler avec des réseaux de concepts ou avec des algorithmes.

Le développement du matériel informatique, des logiciels et des moyens de communication va se poursuivre à un rythme accéléré. Ce développement va lui-même continuer à bouleverser les méthodes de travail en sciences. On peut penser au travail d'équipe, à l'autonomie, à l'esprit critique, à la capacité à transférer des connaissances, etc. Si nous voulons que notre enseignement reste à jour et que nos élèves soient bien préparés, il nous faudra suivre ce développement technologique, le décrypter et adapter notre enseignement et notre matériel pédagogique au fur et à mesure.

Il faudrait aussi évaluer les changements des méthodes pédagogiques qu'impliquent les nouvelles façons de travailler en sciences et en tenir compte.

Il faudrait surtout pouvoir évaluer ce qui se fait, avoir un temps raisonnable pour se perfectionner, pour échanger sur d'autres expériences menées dans d'autres cégeps, avoir du temps pour réaliser et améliorer le matériel pédagogique adéquat. Il est déplorable de constater qu'au moment où notre tâche change en profondeur, les ressources diminuent régulièrement. La préparation de matériel pédagogique, le perfectionnement, les réunions, le tutorat, la préparation et la gestion des labs, la correction des travaux sont des éléments nouveaux et de plus en plus lourds de notre tâche. En plus, des budgets aussi importants que ceux de la recherche et des échanges sont pratiquement abolis. En ce sens, des initiatives, comme celle du Saut quantique, qui visent à favoriser les échanges entre les professeurs, sont particulièrement utiles.

Après huit ans d'expérimentation, il nous paraît évident que préparer nos élèves au bouleversement qu'implique le développement des technologies est une nécessité. Il nous apparaît tout aussi clairement que l'introduction des nouvelles technologies dans nos cours, avec tous les changements de méthodes de travail que cela implique, demande beaucoup d'énergie et de réflexion. À notre avis, cela demande des échanges et des collaborations entre ceux et celles qui pensent que les nouvelles technologies doivent avoir une place dans notre enseignement.

Nous sommes enfin reconnaissants à toute l'équipe du Saut quantique pour les efforts qu'elle fait à appuyer les diverses expérimentations qui se mènent et à favoriser les échanges.

Pour terminer, nous serions très reconnaissants à ceux et celles qui nous proposeraient des commentaires, des suggestions ou leur collaboration. Dans ce qui précède, il y a beaucoup de place pour l'amélioration ou pour de nouvelles pistes. La mise en commun d'idées nouvelles ne peut qu'être bénéfique. Pour donner suite à ce qui précède ou pour se procurer les documents utilisés dans la démarche de modélisation, vous pouvez communiquer avec Philippe Etchecopar, coordonnateur B du département de mathématiques :

Département de mathématiques
Cégep de Rimouski
60 Évêché Ouest
Rimouski (Québec)
G5L 4H6
Courriel : etchecop@globetrotter.qc.ca

Concluons par un extrait de « Qu'est-ce que les mathématiques ? » de Norbert Verdier :

> *Par delà les mathématiques, les sciences en général, gourmandes en expériences de toutes sortes, bénéficient de la formidable efficacité des mathématiques, en particulier de leurs capacités à modéliser et à simuler.*
>
> *Modéliser un phénomène étudié (comme la chute d'une pierre, le passage d'un courant dans un circuit ou l'étude du noyau atomique) consiste à le traduire mathématiquement, la plupart du temps sous la forme d'une ou plusieurs équations -Le MODÈLE. Le modèle devient ainsi la représentation -et seulement la représentation- du phénomène et permet de nombreuses déductions grâce à des simulations.*
>
> *……*
>
> *Souvent, les simulations permettent d'étudier très facilement différentes possibilités. Au mathématicien ensuite d'optimiser, c'est-à-dire de chercher la meilleure solution (la moins chère si l'on se préoccupe d'un problème économique) parmi toutes les solutions possibles. Par exemple, il existe une infinité de façons de joindre deux points, mais le plus court chemin est le segment de droite joignant ces deux points. Les problèmes d'optimisation : trouver une surface maximale tout en vérifiant certaines contraintes, comme ne pas augmenter le volume de l'objet; lancer un objet le plus loin possible, etc., sont fondamentaux en mathématiques, en particulier en raison des nombreuses applications, aussi bien dans les réalisations technologiques (fuselage d'avion, minimisation des coûts dans une chaîne de production, logistique...) que dans la gestion quotidienne (placements financiers, fiscalisation...).*

Norbert Verdier
Professeur de mathématiques
Université de Paris-Sud (Orsay)
Qu'est-ce que les mathématiques?
Le Pommier 2000

Bibliographie de Norbert Verdier

Manuels pour premiers cycles universitaires

Mathématiques, Tome 1 et 2, Ed. Eska, 1997

Faire des maths avec Mathematica, Ed. ELLIPSES, à paraître en 2001

Livres de vulgarisation :

L'infini en mathématiques, Ed. Flammarion, 1997

A quoi servent les mathématiques ? Ed. Milan, 1998

Le Dico des sciences, Ed. Milan, 1999

Qu'est-ce que les mathématiques ?, Ed. Le Pommier, 2000

Le Discret et le continu : introduction aux fonctions, Ed. Le Pommier, à paraître.