

Scalaire est-il synonyme de réel?

Activité réalisée au Cégep de Sherbrooke

par **MARIE-JANE HAGUEL, NICOLAS PFISTER** et **SYLVIE SAVAGE**

En algèbre linéaire, on parle de produit scalaire et de produit par un scalaire, mais on n'utilise que les réels comme scalaires. Cette activité vise tout d'abord à étudier la notion de scalaire, donc la notion de corps, pour constater qu'il existe des scalaires autres que les réels.

À partir de la définition axiomatique d'un corps, les élèves construisent en premier lieu le corps à deux éléments. Ils découvrent ensuite le corps des nombres complexes par l'approche suivante: étant donné l'ensemble $K(\alpha, \beta)$ formé de tous les couples de réels (α, β) muni d'une addition et d'une multiplication, il faut vérifier que les propriétés d'un corps soient satisfaites.

Par la suite, les élèves doivent constater que le produit scalaire tel qu'il est défini dans \mathbb{R}^2 (et \mathbb{R}^n) n'est pas valide dans $K^2(\alpha, \beta)$. À partir des propriétés définissant un produit scalaire, les élèves en obtiennent une généralisation.

Cette activité amène les élèves à approfondir, de manière autodidacte, certains éléments de contenu du cours *Algèbre linéaire*. Cet apprentissage est orienté par une série de questions qui obligent les élèves à faire des liens avec les notions théoriques présentées en classe. Chaque question prépare la question suivante soit par son résultat, soit par la méthode employée pour y répondre, soit par l'objet mathématique manipulé.

Cette activité est originale par le fait qu'elle introduit plus naturellement les nombres imaginaires par les propriétés des opérations dans un corps et non pas par la définition artificielle: un nombre qui, élevé au carré, donne -1. Elle est originale également par le fait que les élèves travaillent pendant presque toute la session sur les nombres complexes sans que ceux-ci ne soient jamais nommés.