Activité 11

LE SAUT QUANTIQUE
CENTRE D'INNOVATION PÉDAGOGIQUE EN SCIENCES AU COLLÉGIAL

Scalaire est-il synonyme de réel?

Activité réalisée au Cégep de Sherbrooke
par **MARIE-JANE HAGUEL, NICOLAS PFISTER**
et **SYLVIE SAVAGE**

Activité 11

Scalaire est-il synonyme de réel?

Date de la dernière mise à l'essai

Automne 2004

Nom des auteurs

Marie-Jane Haguel, Nicolas Pfister et Sylvie Savage

Cégep d'origine

Cégep de Sherbrooke

Adresse électronique des auteurs

Mijoh@allstream.net
Nicolas.pfister@cegepsherbrooke.qc.ca
Sylvie.savage@cegepsherbrooke.qc.ca

Discipline scientifique

Mathématiques

Âge moyen des élèves

18-19 ans

Titre et numéro du cours

Algèbre linéaire (201-NYC-05)

Durée de l'activité

6 semaines

NOTE

Dans ce texte, le générique masculin est utilisé seul, sans aucune discrimination et dans le seul but de l'alléger.

Les annexes en format PDF et Word se retrouvent sur le cédérom qui accompagne ce recueil.

De plus, une analyse pédagogique de l'activité est également disponible dans la section *Trésors pédagogiques* du site Internet du Saut quantique à l'adresse URL : **http://www.apsq.org/sautquantique**.

LE SAUT QUANTIQUE
CENTRE D'INNOVATION PÉDAGOGIQUE EN SCIENCES AU COLLÉGIAL

Scalaire est-il synonyme de réel?

Description de l'activité

APERÇU DE L'ACTIVITÉ

En algèbre linéaire, on parle de produit scalaire et de produit par un scalaire, mais on n'utilise que les réels comme scalaires. Cette activité vise tout d'abord à étudier la notion de scalaire, donc la notion de corps, pour constater qu'il existe des scalaires autres que les réels.

À partir de la définition axiomatique d'un corps, les élèves construisent en premier lieu le corps à deux éléments. Ils découvrent ensuite le corps des nombres complexes par l'approche suivante : étant donné l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ formé de tous les couples de réels (α,β) muni d'une addition et d'une multiplication, il faut vérifier que les propriétés d'un corps soient satisfaites.

Par la suite, les élèves doivent constater que le produit scalaire tel qu'il est défini dans $\mathbb{R}^2$ (et $\mathbb{R}^n$) n'est pas valide dans $K^2_{(\alpha,\beta)}$. À partir des propriétés définissant un produit scalaire, les élèves en obtiennent une généralisation.

PERTINENCE ET ORIGINALITÉ DE L'ACTIVITÉ

Cette activité amène les élèves à approfondir, de manière autodidacte, certains éléments de contenu du cours *Algèbre linéaire*. Cet apprentissage est orienté par une série de questions qui obligent les élèves à faire des liens avec les notions théoriques présentées en classe. Chaque question prépare la question suivante soit par son résultat, soit par la méthode employée pour y répondre, soit par l'objet mathématique manipulé.

Cette activité est originale par le fait qu'elle introduit plus naturellement les nombres imaginaires par les propriétés des opérations dans un corps et non pas par la définition artificielle : un nombre qui, élevé au carré, donne -1. Elle est originale également par le fait que les élèves travaillent pendant presque toute la session sur les nombres complexes sans que ceux-ci ne soient jamais nommés.

Objectifs et relations avec le programme

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES OU COMPÉTENCES VISÉES

Planifier et organiser son travail et son temps en fonction des délais fixés.

Porter un jugement correct sur les résultats obtenus. Prendre conscience qu'il est impossible de comprendre la portée d'une question avant d'y avoir répondu.

Comprendre ce qu'est une opération. La notion d'opération se limite souvent à connaître la touche correspondante de la calculatrice. Ce travail permet d'explorer et de comprendre la notion d'opération en situant l'élève dans un contexte qui lui est suffisamment étranger afin de l'obliger à exploiter la définition de l'opération et les propriétés qui lui sont associées.

Prendre conscience de l'importance du concept de fermeture que l'on retrouve dans les notions d'espace vectoriel et de corps, et dans l'ensemble des structures mathématiques.

Apprendre à effectuer des manipulations algébriques dans un cadre possédant plusieurs niveaux différents d'abstraction : les vecteurs étant définis sur le corps des nombres complexes, les composantes de ces vecteurs possèdent elles-mêmes des composantes.

Comprendre la notion de généralisation en mathématiques et apprendre à obtenir une généralisation d'un résultat lorsqu'on élargit son champ d'application.

RELATIONS ENTRE L'ACTIVITÉ ET LE PROGRAMME

Buts généraux de programme visés

Les buts généraux du programme *Sciences de la nature* visés par cette activité sont :

- Raisonner avec rigueur;
- Communiquer de façon claire et précise;
- Apprendre de façon autonome;
- Travailler en équipe;
- Traiter de situations nouvelles à partir de ses acquis.

Lien avec le cours

Cette activité reprend, dans un cadre général, les propriétés vues dans le cours pour les vecteurs géométriques et algébriques sur les réels, ainsi que la notion de produit scalaire.

Lien avec les autres cours

Dans les cours *Calcul différentiel* et *Calcul intégral*, les élèves utilisent des propriétés des réels qui sont énoncées d'une manière générale dans ce travail.

Dans ces cours de calcul, on retrouve aussi le concept de fermeture pour les opérations sur les fonctions.

Nombre d'élèves et encadrement pédagogique

NOMBRE APPROXIMATIF D'ÉLÈVES DANS LA CLASSE

30 élèves

NOMBRE D'ÉLÈVES PAR ÉQUIPE

2 personnes

ENCADREMENT PÉDAGOGIQUE

Le professeur prévoit du temps d'exercices en classe pour cette activité. Il est également disponible en dehors des heures de cours pour offrir de l'aide aux élèves.

Le travail est divisé en trois parties, chacune suivie d'une rétroaction en classe pour s'assurer que chaque élève a bien saisi les concepts et est en mesure de les réinvestir dans la partie suivante.

Déroulement de l'activité

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ ET TEMPS DE RÉALISATION DE CHAQUE ÉTAPE

Avant

Les notions d'addition vectorielle, de multiplication par un scalaire, d'espace vectoriel et de produit scalaire sont présentées en classe.

Pendant

Le travail consiste en trois devoirs (voir les annexes E.1, E.2 et E.3) que les élèves font en équipe de deux, surtout en dehors des heures de classe.

La matière à voir pendant la session est séparée en trois parties, qui se termine chacune par un examen. Le travail est réalisé en parallèle avec la matière vue en classe. Les élèves ont deux semaines pendant chacune des trois parties du cours pour les trois devoirs.

Le professeur corrige les devoirs et les remet aux élèves avant la partie suivante.

Après

Les élèves sont invités à lire le chapitre consacré aux nombres complexes, dans le manuel de Vincent Papillon (voir la médiagraphie), et à comparer l'approche présentée dans cette activité avec l'approche plus classique que l'on retrouve dans le livre.

Le professeur peut aussi choisir de poser une courte question sur cette activité lors de l'examen.

Les élèves retirent énormément de satisfaction du travail accompli.

Évaluation et matériel nécessaire

SUGGESTIONS D'ÉVALUATION

À l'automne 2004, ce travail a compté pour 10 % de la note finale. Une pondération de 15 % serait plus appropriée pour mieux représenter la quantité de travail fournie par les élèves.

La grille de correction pour chacun des devoirs est en annexe.

ANNEXES

Professeur

Annexe P.1 : Grille de correction du premier devoir

Annexe P.2 : Grille de correction du deuxième devoir

Annexe P.3 : Grille de correction du troisième devoir

Élèves

Annexe E.1 : Premier devoir

Annexe E.2 : Deuxième devoir

Annexe E.3 : Troisième devoir

Remarque :

Les annexes sont incluses en format PDF et Word sur le cédérom qui accompagne ce recueil.

Les auteurs autorisent toute utilisation de ces documents à des fins pédagogiques, pourvu qu'il y ait mention des auteurs et de leur collège.

Autres suggestions et médiagraphie

AUTRES IDÉES À EXPLORER

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, alors le théorème de Pythagore dit que :

$$\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2$$

ce que l'on peut écrire sous la forme suivante, en utilisant la notation du produit scalaire :

$$\vec{u}\bullet\vec{u} + \vec{v}\bullet\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}+\vec{v}).$$

Il serait intéressant de voir comment le théorème de Pythagore se généralise dans un espace vectoriel sur les complexes, en utilisant le produit scalaire défini sur ces complexes.

MÉDIAGRAPHIE

PAPILLON, Vincent (1993). *Vecteurs, matrices et nombres complexes*, Mont-Royal, Modulo Éditeur, 387 p.