Travail 2 Laboratoire 4 - Preuves par récurrence (induction) avec des matrices

Fichier Maple à consulter : Travail2-Lab4-Recurrence.mws sur le site du Saut quantique dans la section *Dossiers — Logiciels de calcul symbolique* (http://www.apsq.org/sautquantique/doss/d-logiciels.html#algebre).

Cliquer sur les points « + » du fichier Maple pour voir les exemples et réaliser les exercices ci-dessous avec Maple :

+ Exemples

Exercices :

No 1) Pour chacune des matrices A suivantes,
A) Trouver une formule pour A^n où n est un nombre naturel
B) Prouvez-la par récurrence

A) Soit A = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

B) Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

C) Soit A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

D) Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

E) Soit A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

F) Soit A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

G) Soit A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

No 2) Pour la matrice A suivante, trouver une formule pour A^n où n est un nombre naturel

H)* Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

No 3) Compléter la preuve par récurrence de l'exemple 2), en faisant, à l'aide de Maple, le cas B):

Si l'exposant de A est pair, prouvez que pour tout n,

$$A^{(2n)} = \begin{bmatrix} 2^{(2n-1)} & 2^{(2n-1)} & 0 & 0 \\ 2^{(2n-1)} & 2^{(2n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{(2n-1)} & 2^{(2n-1)} \\ 0 & 0 & 2^{(2n-1)} & 2^{(2n-1)} \end{bmatrix}$$