

## Laboratoire 4 – Matrices

Fichier Maple à consulter : Lab 4-Matrices.mws sur le site du Saut quantique dans la section *Dossiers — Logiciels de calcul symbolique* (<http://www.apsq.org/sautquantique/doss/d-logiciels.html#algebre>).

Principales commandes utilisées dans ce laboratoire

array, matrix de la bibliothèque linalg, randmatrix, piecewise, row,col, delrows, delcols, submatrix, augment, evalm, multiply, dotprod, subs avec op, equate avec la bibliothèque student, solve, seq, diag, identity, symmetric, antisymmetric, rand.

Cliquer sur les points « + » du fichier Maple pour en savoir plus sur les éléments théoriques et réaliser les exercices ci-dessous avec Maple :

- + Définitions de matrice : avec matrix ou array
- + Les éléments des matrices, les lignes et les colonnes
- + Algèbre des matrices
- + Substitution dans une matrice
- + Égalité de matrices
- + Combinaison linéaire des vecteurs-colonnes d'une matrice
- + Matrices carrées particulières

### Exercices

**No 1)** Trouvez **a)**  $F^2$  **b)**  $F^3$  **c)**  $F^n$ , où  $F$  est la matrice diagonale suivante :  $F:=\text{diag}(1,2,3,5)$ ;

**No 2)** Pour quelles valeurs de  $x,y,z,w$  a-t-on  $xA + yB + zC + wF = E$  ?

$A:=\text{matrix}(2,2,[1,3,-5,3]);B:=\text{matrix}(2,2,[9,0,-3,1]);C:=\text{matrix}(2,2,[4,2,0,8]);F:=\text{matrix}(2,2,[-4,-6,8,10]);E:=\text{matrix}(2,2,[4,5,8,9]);$

**No 3)** Soit  $A:=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Résoudre  $Ax = 9x$  où  $x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$

**No 4)** Une matrice A est idempotente si  $A^2 = A$ . Parmi les matrices suivantes, trouver celle qui est idempotente.

**G:=matrix(3,3,[3,4,7,-3,7,-12,9,9,8]);H:=matrix([[ -25, -75, -125], [7, 21, 35], [1, 3, 5]]);J:=matrix(3,3,(i,j)->i+j);**

**No 5)** Trouvez, s'il y a compatibilité

**A:=matrix(3,3,[2,44,-3,8,-2,-80,12,3,10]);B:=randmatrix(4,4):C:=matrix(4,3,[5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10]):E:=matrix(3,3,(i,j)->i-j):  
A=evalm(A),B=evalm(B),C=evalm(C),E=evalm(E);**

- AE et EA. Comparez les réponses
- (BC)E et B(CE) Comparez les réponses.
- $(A+E)^2$
- $A^2 + 2AE + EA + E^2$ . Comparez votre réponse avec c)
- $A^2 + AE + EA + E^2$  Comparez votre réponse avec c)

**No 6)** Une matrice A est nilpotente s'il existe un nombre naturel p tel que  $A^p = 0$  (matrice nulle). La plus petite valeur de p pour laquelle  $A^p = 0$  est appelé l'indice de nilpotence. Montrer que la matrice A est nilpotente et trouver son indice de nilpotence.

$A=matrix([[0, 1, 12, 4,7], [0, 0, 7, 10,-8], [0, 0, 0, 15,2], [0, 0, 0, 0,-12],[0, 0, 0, 0,0]]);$

**No 7)** Si  $M^2 = I$  alors a-t-on  $M = I$  ou  $M = -I$ ? Étudiez ceci avec la matrice suivante:

$M:=(1/3)*matrix(3,3,[1,-2,-2,-2,1,-2,-2,-2,1]);$

**No 8)** Trouver la plus petite valeur de k tel que  $M^k = I$  où M est la matrice suivante :

**M := matrix([[sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2], [sqrt(2)/2, sqrt(2)/2]]);**

**No 9)** Soit  $u = (a,b,c,d)$ ;et  $v = (d,c,b,a)$ , des vecteurs-colonnes

- Trouver une matrice diagonale A telle que  $Au = v$
- Trouver une matrice non diagonale A telle que  $Au = v$

**No 10)** Soit  $u = (a,b,c,d)$  et  $v = (a + c, b + d)$ , des vecteurs-colonnes. Trouver une matrice A telle que  $Au = v$

**No 11)** Soit  $A = \begin{bmatrix} c & 2 & -4 \\ 3 & a & 6 \\ 2 & 7 & b \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & a & 4 \\ b & 6 & 5 \\ 4 & -2 & b \end{bmatrix}$  et  $C = \begin{bmatrix} -32 & 0 & 42 \\ 30 & -48 & -26 \\ -37 & 40 & 52 \end{bmatrix}$

Sachant que  $C = AB$ , trouver a, b et c à l'aide seulement de produit scalaire de lignes de A avec des colonnes de B ;

$C[i,j] = \text{dotprod}(\text{row}(A,i),\text{col}(B,j))$

Note : Écrire sur votre première ligne de solution : `assume(a,real): assume(b,real): assume(c,real):`