

## Annexe P.1 : Grille de correction du rapport écrit

### Première question

Première question		Deuxième question	
a) $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ indépendants	/1	a) $\vec{v} \bullet \vec{e}_1$ et $v'_1$ en fonction de $\vec{v}$ , $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$	/1
$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ normés	/1	$\vec{v} \bullet \vec{e}_2$ et $v'_2$ en fonction de $\vec{v}$ , $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$	/1
$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ orthogonaux	/1	b) ? lorsque la base $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ est orthonormée	/1
b) $\vec{v} = (-3, 2)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}$ dans la base $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$	/1		
c) $(v'_1, v'_2)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}$ du vecteur $\vec{v} = (4, 5)_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle}$	/1		
Total	/5	Total	/3

### Troisième question

a) $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ ?	/1
Est-ce une base normée?	/1
Est-ce une base orthogonale?	/1
En calculant les produits scalaires appropriés, exprimer les composantes $v'_i$ de tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z)_{\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle}$ de $\mathbb{R}^3$	/1
Les autres	/1
Total	/5

### Quatrième question

a) Hypothèse	/1
Enjeu	/1
Démonstration	/1
b) Contre-exemple	/1
c) Justification	/1
Total	/5

**Cinquième question**

a) hypothèse	/0,5
Énoncé du théorème	/0,5
Démonstration : les six premières propriétés	/0,5
Démonstration : l'inclusion entraîne l'existence de 0	/0,5
Démonstration : la fermeture entraîne l'appartenance de 0 à W	/0,5
Démonstration : l'inclusion entraîne l'existence de -u	/0,5
Démonstration : la fermeture entraîne l'appartenance de -u à W	/0,5
Application à E	/0,5
Application à F	/0,5
b) Base de E choix de vecteur	/0,5
Base de E : indépendance	/0,5
Base de E : générescence	/0,5
Base de E : dimension	/0,5
c) Base de G choix de vecteurs	/0,5
Base de G : indépendance	/0,5
Base de G : générescence	/0,5
Base de G : dimension	/0,5
Total	/8,5

Sixième question		Septième question	
a) L'ensemble des $k\vec{e}$ : sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$	/1	a) $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ une base de E : indépendance	/0,5
Fermeture +	/1	Générescence	/0,5
Fermeture *k	/1	Normée?	/0,5
Conclusion	/0,5	Orthogonale?	/0,5
b) Projection orthogonale $\vec{v}_0$ de $\vec{v}$ sur $\vec{e}$	/1	b) Projection orthogonale $\vec{v}_0$ de $\vec{v}$ sur E	/1
Vecteur complément orthogonal $\vec{v}_1$	/0,5	Vecteur complément orthogonal $\vec{v}_1$	/0,5
c) Évaluer $\ \vec{v} - k\vec{e}\ $ en fonction de $\theta$ et de h	/1	c) Évaluer $\ \vec{v} - (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2)\ $ en fonction de $\theta$ et de h	/1
Choix de $\theta$	/1	Choix de $\theta$	/1
Théorème des résultats combinés de b) et c).	/1	Théorème des résultats combinés de b) et c).	/1
Total	/8	Total	/6,5

#### Huitième question

V somme d'un de E et d'un orthogonal à E	/0,5
Celui de E combinaison linéaire des $e_i$	/1
L'autre orthogonal aux $e_i$	/1
Résultat convenablement déduit	/1
Modification du résultat si les $e_i$ sont unitaires	/0,5
Total	/4

### Neuvième question

Sous-ensemble d'un e.v.					/1
Continuité		Bornées		Définies sur ]-1, 1]	
Fermé +	/0,5	Fermé +	/0,5	Fermé +	/0,5
Fermé *k	/0,5	Fermé *k	/0,5	Fermé *k	/0,5
Conclusion					/0,5
Total					/4,5

### Dixième question

Introduction sur la nécessité de $F(]-1, 1])$		/0,5
1. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$		/1
2. $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$		/1
3. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$		/1
$(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$		/0,5
4. $\vec{u} \bullet k\vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$		/1
$k\vec{u} \bullet \vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$		/0,5
Conclusion		/0,5
Total		/6

**Onzième question**

a) Sous-ensemble d'un e.v.					/1
Fermeture +					/1
Fermeture *k					/1
Conclusion					/1
b) Générescence	/0,5	Orthogonalité	/0,5	Indépendance	/1
Normalité	/0,5				
Dimension					/0,5
Conclusion					/0,5
Total					/7,5

**Douzième question**

F est un élément de $F([-1, 1])$	/1
Enjeu : le vecteur de E le plus proche de f	/1
Projection orthogonale de f sur E	/1
Formule en produits scalaires	/0,5
Formule en intégrales	/0,5
Résultat numérique	/1
Graphe	/1
Total	/6

**Treizième question**

Résumé	/4
Ouverture	/2
Total	/6

**TOTAL**

<b>Question 1</b>	<b>Question 2</b>	<b>Question 3</b>	<b>Question 4</b>	<b>Question 5</b>	<b>Question 6</b>	<b>Question 7</b>
/5	/3	/5	/5	/8,5	/8	/6,5
<b>Question 8</b>	<b>Question 9</b>	<b>Question 10</b>	<b>Question 11</b>	<b>Question 12</b>	<b>Question 13</b>	<b>Total</b>
/4	/4,5	/6	/7,5	/6	/6	/75

**Annexe P.2 : Grille de correction de l'exposé oral du projet de fin d'études**

IDENTIFICATION DE L'ÉQUIPE			
CONTENU TRAITÉ			
<p>FORME (5 points)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Qualité du français</li> <li>- Tenue, dynamisme</li> <li>- Garde un contact visuel avec les étudiants de la classe</li> <li>- Élocution, débit, hésitation sonore (heu...)</li> <li>- Utilisation du médium</li> </ul>			
<p>STRUCTURE (10 points)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Position du sujet dans l'ensemble</li> <li>- Clarté</li> <li>- Cohérence</li> <li>- Complétude</li> </ul>			
<p>CONTENU (10 points)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Idée forte</li> <li>- Originalité</li> <li>- Démonstration</li> <li>- Application du théorème</li> </ul>			

**Total : \_\_\_\_\_**

## Annexe E.1 : Questionnaire

### UN REGARD VECTORIEL SUR LE GRINCEMENT DE DENTS

La phrase « Est un vecteur tout objet qui se comporte collectivement comme tel » n'est pas une boutade. Elle formule l'idée que nous pouvons nous inspirer des opérations définies sur les vecteurs géométriques et sur les vecteurs numériques, ainsi que des raisonnements qui nous permettent de les manipuler, pour travailler sur d'autres objets, simplement parce que ceux-ci se comportent par rapport à l'addition et à la multiplication par un scalaire comme le font les vecteurs géométriques et les vecteurs numériques.

#### PREMIÈRE PARTIE

Dans la première partie de ce travail, nous souhaitons explorer, dans  $\mathbb{R}^2$  et dans  $\mathbb{R}^3$ , les relations entre changement de bases, base orthonormée et base orthogonale, produit scalaire et composantes d'un vecteur dans une base.

1. Soit  $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$  la base orthonormée directe habituelle de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons les vecteurs  $\vec{e}_1 = (0,1)_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle}$  et  $\vec{e}_2 = (1,1)_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle}$ .
  - a) L'ensemble ordonné  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$  forme-t-il une base de  $\mathbb{R}^2$ ? Si c'est le cas, est-ce une base normée (formée de vecteurs unitaires); est-ce une base orthogonale?
  - b) Exprimer le vecteur  $\vec{v} = (-3,2)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}$  dans la base  $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ .
  - c) Quelles sont les composantes  $(v'_1, v'_2)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}$  du vecteur  $\vec{v} = (4,5)_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle}$  ?
2. Soit  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$  une base orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  et soit un vecteur  $\vec{v} = (v'_1, v'_2)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}$  de  $\mathbb{R}^2$ .
  - a) Calculer  $\vec{v} \cdot \vec{e}_1$  et  $\vec{v} \cdot \vec{e}_2$  et en déduire la valeur de  $v'_1$  et  $v'_2$  en fonction de  $\vec{v}$ ,  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .
  - b) Comment modifier le résultat précédent lorsque la base  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$  considérée est orthonormée?

3. Soit  $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$  la base orthonormée directe habituelle de  $\mathbb{R}^3$ . Considérons les vecteurs  $\vec{e}_1 = (1, 1, 0)_{\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle}$ ,  $\vec{e}_2 = (1, -1, 1)_{\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle}$  et  $\vec{e}_3 = (1, -1, -2)_{\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle}$ .
- L'ensemble ordonné  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$  forme-t-il une base de  $\mathbb{R}^3$ ? Si c'est le cas, est-ce une base normée; est-ce une base orthogonale?
  - Exprimer le vecteur  $\vec{v} = (1, 1, 1)_{\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle}$  dans la base  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ . On donne la réponse à a). Reformuler a) ou b).
  - En calculant les produits scalaires appropriés, exprimer les composantes  $(v'_1, v'_2, v'_3)_{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle}$  de tout vecteur  $\vec{v} = (x, y, z)_{\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère l'ensemble  $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \}$  tel que les vecteurs  $\vec{e}_i$  soient tous non nuls.
- Démontrer que si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux, alors ils sont linéairement indépendants.
  - La proposition réciproque de a) est-elle vraie? Justifier la réponse.
  - Le résultat de a) dépend-il de la dimension de l'espace considéré?

## DEUXIÈME PARTIE

Dans la deuxième partie de ce travail, nous explorerons la possibilité que certains sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  soient constitués d'éléments « qui se comportent collectivement comme des vecteurs ».

5. Dans  $\mathbb{R}^2$ , considérons d'une part l'ensemble E de tous les couples (x, y) qui vérifient l'équation  $2x+y=0$  et d'autre part l'ensemble F de ceux qui vérifient l'équation  $2x+y=1$ .
- Comparer la façon dont les couples de E et F se comportent par rapport à l'addition et à la multiplication par un scalaire. En déduire un théorème (à formuler et à démontrer) qui permet d'examiner au moindre coût possible le

comportement des éléments d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel relativement à l'addition et à la multiplication par un scalaire. Ce théorème devrait permettre de se soustraire à l'obligation de traiter **toutes** les propriétés de ces deux opérations.

- b) Déterminer une base de  $E$ . Étudier la dimension de  $E$ .
- c) En application, construire une base de l'ensemble  $G$  des solutions de l'équation  $2x+y+3z-w=0$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

### TROISIÈME PARTIE

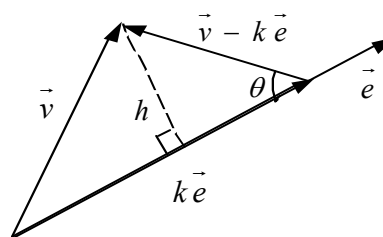
Dans la troisième partie de ce travail, nous examinerons la possibilité de trouver, dans un sous-espace donné, le vecteur « le plus proche » d'un vecteur donné de l'espace.

6. Dans  $\mathbb{R}^3$ , rapporté à la base orthonormée directe habituelle  $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ , considérons les vecteurs  $\vec{e} = (1, -1, 1)$  et  $\vec{v} = (1, 2, 3)$ .

a) Comment l'ensemble des multiples scalaires du vecteur  $\vec{e}$  se comporte-t-il par rapport à l'addition et à la multiplication par un scalaire?

b) Déterminer la projection orthogonale  $\vec{v}_0$  de  $\vec{v}$  dans la direction de  $\vec{e}$ , ainsi que le vecteur complément orthogonal  $\vec{v}_1$  tel que  $\vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}$ .

c) Parmi tous les multiples scalaires  $k\vec{e}$  de  $\vec{e}$ , on souhaite trouver celui qui est « le plus proche » de  $\vec{v}$ . Une façon de faire est de choisir le vecteur  $k\vec{e}$  de manière à ce que la différence  $\vec{v} - k\vec{e}$  soit un vecteur ayant la plus petite longueur possible. Pour ce faire, évaluer  $\|\vec{v} - k\vec{e}\|$  en fonction de l'angle  $\theta$  et de



la distance  $h$  et choisir la valeur de  $\theta$  qui minimise cette expression.

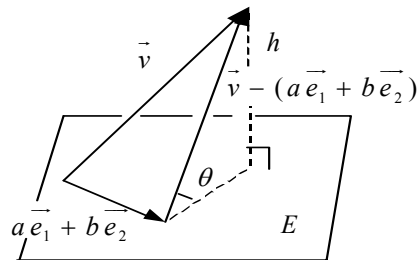
d) Énoncer sous forme de théorème les résultats combinés de b) et c).

7. Toujours dans  $\mathbb{R}^3$ , un problème qui serait semblable à celui traité à la question 6 serait de décomposer le vecteur  $\vec{v}$  en une somme de deux vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{v}_1$ , tel que  $\vec{v}_0$  soit dans un certain sous-espace plan  $E$  et  $\vec{v}_1$  orthogonal à ce plan. On appellerait  $\vec{v}_0$  la projection orthogonale de  $\vec{v}$  dans le plan  $E$ .

Soit  $E$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $\vec{e}_1 = (1, -1, 1)_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  et  $\vec{e}_2 = (1, -1, -2)_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ .

- a) Étudier la possibilité que  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  forment une base de  $E$  et la nature éventuelle de cette base.
- b) Décomposer le vecteur  $\vec{v} = (1, 1, 1)_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  comme une somme de deux vecteurs, l'un  $\vec{v}_0$  dans  $E$  et l'autre  $\vec{v}_1$  orthogonal à tout vecteur de  $E$ .

- c) Parmi toutes les combinaisons linéaires  $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$  de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , on souhaite trouver celle qui est « la plus proche » de  $\vec{v}$  au sens où  $\|\vec{v} - (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2)\|$  est la plus petite possible. Faire ce choix à partir du calcul de  $\|\vec{v} - (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2)\|$  en fonction de l'angle  $\theta$  et de la distance  $h$ .



- d) Énoncer sous forme de théorème les résultats combinés de b) et c).

8. Le vecteur d'un sous-espace E « le plus proche » d'un vecteur donné  $\vec{v}$  d'un espace euclidien est noté :  $P_E(\vec{v})$ .

a) Soit  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k \rangle$  une base orthogonale du sous-espace E, démontrer que

$$P_E(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \vec{e}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2} \vec{e}_2 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_k}{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k} \vec{e}_k.$$

b) Comment modifier le résultat précédent lorsque la base considérée est orthonormée?

#### QUATRIÈME PARTIE

Dans la quatrième partie de ce travail, nous visons à élargir la notion de vecteur à des espaces de nature non géométrique et non numérique, et à démontrer que l'expression « se comporter comme des vecteurs » ne consiste pas seulement à vérifier une dizaine de propriétés simples mais qu'elle peut correspondre à une analogie plus profonde et plus substantielle.

9. Considérons l'ensemble  $F([-1,1])$  constitué des fonctions définies, bornées et continues sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Étudier le comportement de cet ensemble par rapport à l'addition et à la multiplication par un scalaire.

10. On appelle produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  toute application qui fait correspondre à chaque couple de vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v})$  un scalaire  $\in \mathbb{R}$  noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ayant les quatre propriétés suivantes :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

3.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

4.  $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$  et  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Dans l'espace  $F([-1,1])$ , peut-on dire que  $f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$  est un produit scalaire?

11. Dans l'espace  $F([-1, 1])$ , on considère l'ensemble des fonctions continues et bornées de la forme :

$$p(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + \dots + a_n \cos n\pi x + b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2\pi x + \dots + b_n \sin n\pi x$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  sont des scalaires réels.

Ces fonctions sont appelées polynômes trigonométriques et si  $a_n \neq 0$  ou  $b_n \neq 0$ , on dit que  $n$  est le degré du polynôme.

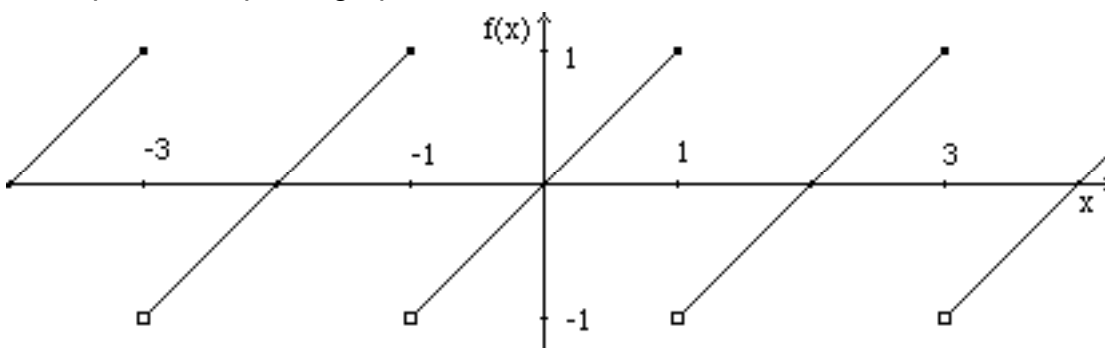
a) Étudier le comportement de cet ensemble de fonctions par rapport à l'addition et à la multiplication par un scalaire.

b) En s'inspirant de la question 4, démontrer que l'ensemble  $B = \{1, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \dots, \cos n\pi x, \sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots, \sin n\pi x\}$  est une base orthogonale du sous-espace  $E$  de  $F([-1, 1])$  formé des polynômes trigonométriques de degré  $n$  ou moins.

c) Déterminer si cette base  $B$  est orthonormée.

d) Quelle est la dimension de  $E$ ?

12. En application, on considère le problème de simulation, à l'aide d'un synthétiseur, d'un grincement de dents dont l'onde sonore peut être représentée par le graphe suivant :



Ce grincement de dents peut être exprimé algébriquement par la répétition périodique de la fonction continue et bornée  $f(x) = x$  définie sur l'intervalle  $]-1, 1]$ . Toutefois, puisque le synthétiseur utilisé pour la simulation date de quelques années, il ne permet que de combiner des ondes constantes ou sinusoïdales de la forme  $\cos n\pi x$  ou  $\sin n\pi x$ . Il faut donc simuler ce grincement par une combinaison de fonctions de ce type.

Obtenir la meilleure approximation de ce grincement de dents à l'aide d'un polynôme trigonométrique de degré 5.

### 13. Conclusion